

Die Volatilität von Finanzmarktdaten

Theoretische Grundlagen und empirische Analysen von stündlichen
Renditezeitreihen und Risikomaßen

Inauguraldissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät

der

Universität zu Köln

2009

vorgelegt

von

Dipl.-Volksw. Marcus Schmelzer

aus Köln

Referent: Prof. Dr. Ralph Anderegg

Korreferent: Prof. Dr. Manfred Feldsieper

Tag der Promotion 6. Mai 2009

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vi
Abkürzungsverzeichnis	viii
1 Einleitung	1
2 Zeitreihenanalyse bei Finanzmarktdaten	4
2.1 Methodische Grundlagen der Zeitreihenanalyse	5
2.1.1 Stationäre stochastische Prozesse	5
2.1.2 Stationäre Kennzahlen von stochastischen Prozessen	7
2.2 Das Datenmaterial für die empirische Untersuchung	9
2.2.1 Datenbeschreibung	9
2.2.2 Test auf Stationarität	9
2.2.3 Statistische Eigenschaften der untersuchten Daten	11
2.2.4 Autokorrelation der Renditen für Finanzmärkte	18
2.3 Lineare stochastische Prozesse	20
2.3.1 Autoregressiver Prozess	21
2.3.2 Moving-Average-Prozess	23
2.3.3 Autoregressive-Moving-Average-Prozesse	26
2.3.4 Schätzung und empirische Ergebnisse von ARMA-Modellen .	29
2.3.5 Beurteilung der Modellschätzung durch ARMA-Modelle . . .	30
3 Die Volatilität bei Finanzmarktdaten	32
3.1 ARCH-Modell	34

3.1.1	Theorie und Definition des ARCH-Modells	34
3.1.2	Test auf nichtlineare Muster	39
3.1.3	Schätzung und empirische Ergebnisse des ARCH-Modells . .	40
3.1.4	Beurteilung des ARCH-Modells	41
3.2	GARCH-Modell	42
3.2.1	Theorie und Definition des GARCH-Modells	42
3.2.2	Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-Modells .	46
3.2.3	Beurteilung des GARCH-Modells	47
3.3	GARCH-M-Modell	48
3.3.1	Theorie und Definition des GARCH-M-Modells	48
3.3.2	Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-M-Modells	50
3.3.3	Beurteilung des GARCH-M-Modells	51
3.4	EGARCH-Modell	52
3.4.1	Theorie und Definition des EGARCH-Modells	52
3.4.2	Schätzung und empirische Ergebnisse des EGARCH-Modells	53
3.4.3	Beurteilung des EGARCH-Modells	55
3.5	TGARCH-Modell	56
3.5.1	Theorie und Definition des TGARCH-Modells	56
3.5.2	Schätzung und empirische Ergebnisse des TGARCH-Modells	58
3.5.3	Beurteilung des TGARCH-Modells	59
3.6	Kapitalmarkteffizienz	60
3.6.1	Grundlagen und Eigenschaften	60
3.6.2	Die Random-Walk-Hypothese	61
3.6.3	Beurteilung des Konzeptes der Kapitalmarkteffizienz . . .	64
3.7	Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse	66
4	Finanzmarktdaten und Risikomaße	68
4.1	Value at Risk	68
4.2	Value-at-Risk als Riskomaß	69
4.2.1	Methoden zur Messung des Marktrisikos mit Value at Risk .	71
4.2.2	Das ergänzende Datenmaterial zum Value-at-Risk	74
4.2.3	Value-at-Risk Ermittlung auf Basis der historischen Simulation	74
4.2.3.1	Modelldarstellung der historischen Simulation . . .	74

4.2.3.2	Schätzung und empirische Ergebnisse der historischen Simulation	75
4.2.3.3	Kritische Würdigung der historischen Simulation	76
4.2.4	Value-at-Risk Berechnung mit dem GARCH-Modell	77
4.2.4.1	Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-Modells	77
4.2.4.2	Kritische Würdigung des GARCH-Modells	79
4.2.5	Value-at-Risk Berechnung mit dem Modell des exponentiellen Glättens	79
4.2.5.1	Modelldarstellung der exponentiellen Glättung	79
4.2.5.2	Schätzung und empirische Ergebnisse der exponentiellen Glättung	81
4.2.5.3	Kritische Würdigung der exponentiellen Glättung	82
4.2.6	Zusammenfassung und Vergleich der empirischen Ergebnisse	83
4.3	Betafaktor als Risikomaß	87
4.3.1	Der Betafaktor und seine finanzierungstheoretische Grundlagen	88
4.3.1.1	Grundlagen und Eigenschaften der Portfolio Selektion	88
4.3.1.2	Grundlagen und Eigenschaften des Single-Index Modells	96
4.3.1.3	Grundlagen und Eigenschaften des CAPM-Modells	98
4.3.1.4	Grundlagen und Eigenschaften des Markt-Modells	103
4.3.2	Das ergänzende Datenmaterial zum Betafaktor	104
4.3.3	Bestimmung des Betafaktors durch das Markt-Modell	105
4.3.3.1	Schätzung und empirische Ergebnisse des Marktmodells	105
4.3.3.2	Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das Marktmodells	106
4.3.4	Bestimmung des Betafaktors durch das EGARCH-Modell	109
4.3.4.1	Schätzung und empirische Ergebnisse des EGARCH-Modells	109

4.3.4.2	Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das EGARCH-Modell	111
4.3.5	Bestimmung des Betafaktors durch das FAKTOR-GARCH- Modell	114
4.3.5.1	Modelldarstellung des FAKTOR-GARCH-Modells .	114
4.3.5.2	Schätzung und empirische Ergebnisse des FAKTOR- GARCH-Modells	116
4.3.5.3	Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das FAKTOR-GARCH-Modell	121
4.3.6	Vergleich der empirischen Ergebnisse zum Betafaktor	121
5	Schlussfolgerungen und Ausblick	125
	Literaturverzeichnis	128

Abbildungsverzeichnis

2.1	Stündliche Dax-Kurse und deren Renditen	12
2.2	Stündliche Eon-Kurse und deren Renditen	12
2.3	Stündliche E-Stoxx-Kurse und deren Renditen	13
2.4	Stündliche EADS-Kurse und deren Renditen	13
2.5	Stündliche Eur/US\$-Kurse und deren Renditen	14
2.6	Stündliche Brent-Kurse und deren Renditen	14
2.7	Kerndichteschätzung von den untersuchten Renditezeitreihen	17
2.8	QQ-Plot der Renditezeitreihen und der Standardnormalverteilung .	19
4.1	Der Value at Risk als Quantil $V_{t+h,\alpha}$ der Verteilung der Wertminde- rung des Portfolios von heute auf morgen.	71
4.2	Vergleich des 95% Value-at-Risk für den DAX auf Basis der expo- nentiellen Glättung und des GARCH-Modells	84
4.3	Vergleich des 95% Value-at-Risk für die Deutsche Bank auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells	84
4.4	Vergleich des 95% Value-at-Risk für die Münchner Rückversiche- rung auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells	85
4.5	Vergleich des 95% Value-at-Risk für VW auf Basis der exponentiel- len Glättung und des GARCH-Modells	85
4.6	Linie der möglichen Portfolios aus zwei Aktien A und B	92
4.7	Mögliche Portfolios	94
4.8	Kapitalmarktklinie und Wertpapierlinie im CAPM	99

Tabellenverzeichnis

2.1	Interpretation eines stochastischen Prozesses bei unterschiedlichen Annahmen bezüglich der Parameter w und t	5
2.2	Ergebnisse des ADF-Tests	11
2.3	Statistische Kennzahlen der Renditen	15
2.4	Ljung-Box-Statistik der quadrierten Renditen	20
2.5	Verhalten für Autokorrelationsfunktion und partieller Autokorrelationsfunktion bei verschiedenen Prozesstypen	27
2.6	Schätzungen der ARMA-Modelle	30
2.7	Beurteilung der ARMA-Schätzungen	31
3.1	LM-Test auf ARCH-Effekte	40
3.2	Ergebnisse der ARCH(1)-Schätzung	41
3.3	Beurteilung der ARCH(1)-Schätzung	42
3.4	Ergebnisse der GARCH(1,1)-Schätzung	46
3.5	Beurteilung der GARCH(1,1)-Schätzung	48
3.6	Ergebnisse der GARCH-M-(1,1)-Schätzung	50
3.7	Beurteilung der GARCH-M-(1,1)-Schätzung	52
3.8	Ergebnisse der EGARCH(1,1)-Schätzung	54
3.9	Beurteilung der EGARCH(1,1)-Schätzung	56
3.10	Ergebnisse der TGARCH(1,1)-Schätzung	59
3.11	Beurteilung der TGARCH(1,1)-Schätzung	59
4.1	1-Std und 1-Tages-VaRs bei historischer Simulation	75
4.2	Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei historische Simulation	76

4.3	1-Std und 1-Tages-VaRs bei einem GARCH-Modell	78
4.4	Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei einem GARCH-Modell	78
4.5	1-Std und 1-Tages-VaRs bei exponentieller Glättung	82
4.6	Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei exponentieller Glättung	82
4.7	1-Std und 1-Tages-VaRs für die vier Zeitreihen und für verschiedene Konfidenzniveaus	86
4.8	Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten der vier Zeitreihen für die Backtesting-Periode	87
4.9	OLS-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte	107
4.10	OLS-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte	108
4.11	EGARCH-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte	112
4.12	EGARCH-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte	113
4.13	Schätzergebnis der ersten Stufe	117
4.14	Faktor-Garch-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte	119
4.15	Faktor-Garch-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte	120
4.16	Vergleich der Beta-Schätzungen	124

Abkürzungsverzeichnis

ADF-Test	Augmented Dickey-Fuller-Test
AR	autoregressiv
ar.M.	arithmetisches Mittel
ARCH	auto regressiv conditional heteroscedasticity
ARMA	autoregressiv moving average
CAPM	Capital-Asset-Pricing-Model
d	Differenzierungsgrad
DAX	Deutscher Aktienindex
EADS	European Aeronautic Defence and Space Company
EG	exponentielle Glättung
EGARCH	Exponential GARCH
E-Stoxx	EURO Stoxx
EUR	EURO
GARCH	general auto regressiv conditional heteroscedasticity
GARCH-M	GARCH in Mean
HS	historische Simulation
JB	Jarque-Bera-Statistik
KQ	Kleinste-Quadrate-Verfahren
LM	Lagrange-Multiplikatoren
MA	moving average
MAX	Maximum
MIN	Minimum

ML	Maximum-Likelihood-Methode
Q_{LB}	Ljung-Box-Statistik
QQ	Quantil-Quantil
R^2	Bestimmtheitsmaß
SIC	Schwarz-Bayes-Informationskriterium
St.Abw.	Standardabweichung
TGARCH	Threshold GARCH
US\$	Dollar
VaR	Value-at-Risk

Kapitel 1

Einleitung

Auf Finanzmärkten haben zufällige Schwankungen von Finanzmarktdaten über die Zeit, die Volatilität, große Bedeutung, weil der Wert z.B. von Aktien, Optionen und anderen Wertpapieren hiervon stark beeinflusst ist. Die Schwankungen können im Lauf der Zeit stark variieren. So lösen ruhige Perioden mit kleinen Schwankungen turbulentere Perioden mit größeren Fluktuationen ab. Obwohl sich also die Volatilität über die Zeit verändert, arbeiteten die Wirtschaftswissenschaftler bei der Untersuchung von Finanzmarktdaten wegen des Fehlens einer Alternative lange Zeit mit statistischen Methoden, die eine konstante Volatilität voraussetzen.

Deshalb war die von Robert Engle gemachte Entdeckung ein großer Durchbruch. Er schlug die Klasse der autoregressive bedingten Heteroskedastizität (GARCH-Prozesse) vor, welche gut die Eigenschaften vieler Zeitreihen der Finanzmärkte einfangen konnte und entwickelte Methoden, die es ermöglichen, zeitlich variierende Volatilität zu modellieren. Seine sogenannten ARCH-Modelle und die daraus entwickelten verallgemeinernden GARCH-Modelle sind unverzichtbare Werkzeuge geworden, nicht nur unter Forschern zur Modellierung von Zeitreihen, sondern auch unter Finanzanalysten, die sie unter anderem zur Ermittlung von Risikomaßen verwenden.

Zurzeit beruhen die meisten empirischen Untersuchungen im Zusammenhang mit der Modellierung der Volatilität von Finanzmarktzeitreihen auf historischen Daten mit einer Intervalllänge von einem Tag oder einem Monat. Höher frequentierte Daten, wie Intraday-Daten, haben bislang im Rahmen von Studien über die

Anwendungsmöglichkeiten von Modellen der ARCH bzw. GARCH Klassifikation kaum Beachtung gefunden. Vor diesem Hintergrund ist es die Aufgabenstellung dieser Arbeit, die Volatilität für stündliche Finanzmarktdaten im Zeitablauf adäquat zu beschreiben und dazu empirisch die Anwendbarkeit ausgewählter Modelle der Kapitalmarkttheorie für die Modellierung der Volatilität von stündlichen Kapitalmarktdaten sowie für die Bestimmung von kapitalmarktbezogenen Risikomaßen zu untersuchen.

Der Aufbau der Arbeit folgt im Wesentlichen dieser Aufgabenstellung.

Im Anschluss an die Einleitung findet im zweiten Kapitel eine Zeitreihenanalyse bei ausgewählten Finanzmarktdaten statt. Es werden die in dieser Arbeit verwendeten Finanzmarktdaten beschrieben und ihre statistischen Eigenschaften untersucht. Danach werden die linearen stochastischen Prozesse diskutiert und für die Renditereihen der Finanzmarktdaten werden ARMA-Modelle geschätzt.

Im dritten Kapitel steht die Volatilitätsanalyse der hier ausgewählten Finanzmarktdaten im Mittelpunkt der Betrachtung. Es zeigt sich, dass die aus den Finanzmarktdaten abgeleiteten untersuchten Renditereihen durch nichtlineare Abhängigkeiten in den Residuen gekennzeichnet sind. Um diese nichtlinearen Abhängigkeiten zu berücksichtigen werden die Modelle der ARCH-Familie vorgestellt und spezifiziert. Mit Hilfe dieser Modelle ist es möglich, die Schwankungen der Volatilität im Zeitablauf zu berücksichtigen. Im Anschluss daran werden die hier analysierten Finanzmarktdaten anhand der geschätzten GARCH-Modelle im Hinblick auf den Aspekt der Informationseffizienz untersucht.

Im vierten Kapitel stehen zwei ausgewählte Risikomaße im Vordergrund der Untersuchung dieser Arbeit. Der Value-at-Risk wird für den Bereich des Risikomanagements als erstes Risikomaß vorgestellt. Zuerst werden die Entstehung und die Grundkonzepte des Value-at-Risk vorgestellt. Anschließend wird die Datengrundlage der empirischen Vergleichsstudie beschrieben. Der Kern dieses Abschnitts liegt in der Modellierung des Value-at-Risks durch drei verschiedene Verfahren, um darauf aufbauend diese Methoden zu beurteilen und miteinander zu vergleichen.

Danach wird für den Bereich der Wertpapierbewertungsmodelle der Betafaktor als zweites Risikomaß diskutiert. Es werden die theoretischen Grundlagen des

Betafaktors dargelegt und es wird das dabei zu untersuchende Datenmaterial beschrieben. Dabei liegt der Schwerpunkt dieses Abschnitts in der Schätzung des Betafaktors durch die vorgestellten Modelle und endet mit dem Vergleich der empirischen Ergebnisse.

Abschließend werden im fünften Kapitel die wichtigen Fragestellungen und empirischen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und bewertet.

Kapitel 2

Zeitreihenanalyse bei Finanzmarktdaten

In der empirischen Forschung kommt der Analyse von Zeitreihen eine zentrale Bedeutung zu, liegen doch die Daten des Analyseobjekts in zahlreichen Fällen als zeitabhängige Folge von Datenpunkten vor. Diese Datencharakteristik lässt sich oft bei Finanzmärkten beobachten, bei denen die Daten zu bestimmten wirtschaftlichen Sachverhalten regelmäßig im Zeitablauf erhoben werden, wie dies insbesondere z.B. bei Aktienkursen oder Aktienindizes der Fall ist. Ziel der Zeitreihenanalyse bei Finanzmarktdaten ist es dabei, ein geeignetes Modell für die erhobenen Daten zu finden, mit dem die vorgefundenen Eigenschaften bestmöglich erklärt werden können. Liegt ein plausibles Modell vor, können damit z.B. zukünftige Werte prognostiziert werden. Dies ist besonders bei Finanzmarktdaten sehr attraktiv.

Im Folgenden sollen zunächst zentrale Grundlagen der Zeitreihenanalyse dargestellt werden. Im Anschluss daran wird das im Rahmen dieser Arbeit zu untersuchende empirische Datenmaterial vorgestellt und im Hinblick auf seine statistischen Eigenschaften untersucht. Schließlich erfolgt eine erste Modellierung des empirischen Datenmaterial mit Hilfe des Konzeptes der linearen stochastischen Prozesse der Zeitreihenanalyse.¹

¹Für eine ausführliche Darstellung sei auf Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 90ff., verwiesen. Weitere ausführliche Darstellung der Zeitreihenanalyse geben Schmid, F.; Trede, M., Analyse, 2005, Rinne, H.; Specht, K., Zeitreihen, 2002, Hamilton, J.D., Time, 1994.

2.1 Methodische Grundlagen der Zeitreihenanalyse

2.1.1 Stationäre stochastische Prozesse

Eine Zufallsvariable X ist als eine (meßbare) Abbildung definiert, die den Ergebnissen ω eines Zufallsvorganges jeweils reelle Zahlen $X(\omega)$ zuordnet. Jedem Zeitpunkt t ist eine Zufallsvariable X_t zugeordnet. So ist ein stochastischer Prozess eine Folge $(X_t)_{t \in T}$ von Zufallsvariablen X_t , wobei der als Zeitparameter bezeichnete Index t Element einer höchstens abzählbaren Indexmenge T ist.² Einem stochastischen Prozess liegt ein bestimmter Zufallsvorgang zugrunde. Realisiert sich ein Ergebnis ω des Zufallsvorganges, so nimmt jede Zufallsvariable X_t einen Wert $X_t(\omega)$ an. Man erhält eine Folge $(X_t(\omega))_{t \in T}$ von Werten. Ein stochastischer Prozess ist demnach als eine Abbildung zu verstehen, die jedem Ergebnis ω eines Zufallsvorganges eine Zeitreihe $X_t(\omega)$ zuordnet. $X_t(\omega)$ ist in der Regel reell und kann auf verschiedene Art interpretiert werden, je nachdem ω oder t oder beide als fest oder variabel angesehen werden (vgl. Tabelle 2.1). Demzufolge kann ein stochastischer Prozess entweder als ein Ensemble von Zeitreihen oder als eine Folge von Zufallsvariablen interpretiert werden. Also entspricht eine Zeitreihe genau einer Realisation oder Trajektorie eines stochastischen Prozesses, das heißt jeder Beobachtungswert x_t ist eine Realisation der Zufallsvariablen $X_t(\omega)$, die t zugeordnet ist.

	t fest	t variable
ω fest	$X_t(\omega)$ ist eine reelle Zahl	$X_t(\omega)$ ist eine Folge reeller Zahlen
ω variable	$X_t(\omega)$ ist eine reelle Zufallsvariable	$X_t(\omega)$ ist der gesamte stochastischer Prozess

Tabelle 2.1: Interpretation eines stochastischen Prozesses bei unterschiedlichen Annahmen bezüglich der Parameter ω und t

Entsprechend dem *Konsistenztheorem von Kolmogorov*³ ist ein stochastischer Prozess bereits eindeutig definiert, wenn das System seiner endlich-dimensionalen

²Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 90.

³Beweis: vgl. Laha, R. G.; Rohatgi, V. K., Probability, 1979, S. 22ff.

Verteilungsfunktion bekannt ist. In praktischen Anwendungen ist es jedoch nicht möglich, alle Verteilungsfunktionen eines stochastischen Prozesses zu bestimmen. Deswegen beschränkt man sich auf bestimmte Kenngrößen. Also sind die Momente erster und zweiter Ordnung Erwartungswerte, Varianzen, Kovarianzen und Korrelationen. Diese Momente sind durch die folgenden Funktionen definiert⁴:

- Mittelwertfunktion

$$\mu(t) := E(X_t) \quad (2.1)$$

- Varianzfunktion

$$\sigma^2(t) := Var(X_t) \quad (2.2)$$

- Kovarianzfunktion

$$\gamma(s, t) := Cov(X_s, X_t) = E[(X_s - \mu_X(s))(X_t - \mu_X(t))] \quad (2.3)$$

- Korrelationsfunktion

$$\varrho(s, t) := Corr(X_s, X_t) = Cov(X_s, X_t) / \sqrt{\sigma_X^2(s) \sigma_X^2(t)} \quad (2.4)$$

Die zweiten Momente der Zufallsvariablen X_t seien endlich, das heißt $E(X_t^2) < \infty$, und s, t seien zwei beliebige Zeitpunkte $s - t = \tau$. Dann heißt ein stochastischer Prozess $(X_t(\omega))_{t \in T}$

- mittelwertstationär, wenn

$$E(X_t) =: \mu \quad \text{für alle } t \in T \quad (2.5)$$

-und kovarianzstationär, wenn

$$\gamma(s, t) = \gamma(s - t) =: \gamma_\tau \quad \text{für alle } t \in T \quad (2.6)$$

mit $Cov(X_s, X_t) := Cov(X_s, X_t) = E[(X_s - \mu_X(s))(X_t - \mu_X(t))] =: \gamma(s, t)$.

⁴Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 95.

Da die Varianz eine spezielle Kovarianz ist ($s = t$), ist somit ein kovarianzstationärer Prozess auch ein varianzstationärer Prozess, das heißt

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 \quad \text{für alle } t \in T \quad (2.7)$$

mit $\text{Var}(X_t) = E(X_t - E(X_t))^2 = \sigma_t^2$.

Erfüllt ein Prozess die Bedingungen 2.5 – 2.7, so wird er auch als (schwach) stationär bezeichnet. Das heißt, die Mittelwerte sind zeitunabhängig, und die Kovarianzen hängen nur von der Zeitdifferenz τ der Beobachtungen ab. Ein schwach stationärer Prozess wird also mit Bezug auf seine Momente erster und zweiter Ordnung das gleiche Verhaltensmuster zeigen, gleichgültig in welchem Zeitintervall der Prozess betrachtet wird. Dieser Prozess ist also gegenüber Verschiebungen entlang der Zeitachse invariant.⁵

2.1.2 Stationäre Kennzahlen von stochastischen Prozessen

Im folgenden werden (schwach) stationäre stochastische Prozesse betrachtet. Die für die Charakterisierung dieser Prozesse geeigneten statistischen Kennzahlen sollen hier kurz vorgestellt werden.

Die Autokovarianzfunktion

Die Autokovarianzfunktion $\gamma(t, \tau)$ eines stochastischen Prozesses ist definiert als

$$\gamma(t, \tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+\tau} - E(X_{t+\tau}))) \quad (2.8)$$

Eine Schätzung der Autokovarianzfunktion erfolgt über die *empirische Kovarianz*

$$\hat{\gamma}(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (X_t - \bar{X})(X_{t+\tau} - \bar{X}) \quad (2.9)$$

mit $\bar{X} = \sum_{t=1}^N X_t$.⁶

⁵Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 100f.

⁶Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 236ff.

Die Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion $\rho(t, \tau)$ eines (schwach) stationären Prozesses ist gegeben durch

$$\rho(t, \tau) = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0} \quad (2.10)$$

Es wird hierbei die Korrelation zwischen den Zufallsvariablen X_t und den um τ Zeiteinheiten verschobenen Zufallsvariablen $X_{t+\tau}$ dargestellt, mit $\tau = 0, 1, 2, \dots$. Eine Schätzung der Autokorrelationsfunktion erfolgt mittels der empirischen Korrelationsfunktion⁷

$$r_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0}. \quad (2.11)$$

Die partielle Autokorrelationsfunktion

Für einen AR(k)-Prozess⁸

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2}X_{t-2} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k} + \varepsilon_t \quad (2.12)$$

mit den k Autokorrelationen $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}$ gelten die Differenzengleichungen

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-1} + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k^9 \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten ϕ_{kk} können mit Hilfe der sogenannten "Yule-Walker-Gleichungen"

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

berechnet werden.¹⁰ Der Ausdruck ϕ_{kk} wird partielle Autokorrelationsfunktion genannt. Hierbei wird die Korrelation von X_t und $X_{t+\tau}$ unter Konstanthaltung

⁷Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 243ff.

⁸Siehe für die Darstellung eines Autoregressiven Prozesses auch den nächsten Abschnitt.

¹⁰Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 194ff oder Hamilton, J.D., Autoregressive, 1994, S. 111f.

der dazwischenliegenden Zufallsvariablen $X_u, t < u < t + \tau$ ermittelt.¹¹ Zur Berechnung eines konsistenten Schätzers der partiellen Autokorrelationsfunktion ϕ_{kk} wird in den Yule-Walker Gleichungen der Schätzer der Autokorrelation in 2.10 verwendet.¹²

2.2 Das Datenmaterial für die empirische Untersuchung

2.2.1 Datenbeschreibung

Als Datengrundlage für die hier vorzunehmende empirische Analyse von Finanzmarktdaten wurden die an der Frankfurter Wertpapierbörse ermittelten stündlichen Schlusskurse des DAX, der E-STOXX, der EON AG, der EADS AG, der Kassakurs des Euros (kurz EUR) zum amerikanischen Dollar (kurz US\$) und der BRENT Rohölpreis ausgewählt. Die Verwendung von stündlichen Daten hat den Vorteil gegenüber Tages-, Wochen- oder Monatsdaten, dass einerseits eine größere Datenbasis zur Verfügung steht und andererseits mehr relevante Informationen über die Vergangenheit vorhanden sind. Die Daten der verwendeten Zeitreihen entstammen aus der Datenbank von TELETRADER Professional.¹³ Die Aktienindizes und die Aktienkursdaten sind um Einflussfaktoren wie Dividendenzahlungen, Bezugsrechte aus Kapitalerhöhungen und Splits bereinigt. Der Untersuchungszeitraum reicht für alle stündlichen Zeitreihen vom 01.02.2008 bis zum 01.08.2008. Alle deskriptiven und inferentiellen Analysen sowie sämtliche Abbildungen wurden mit Hilfe der Statistik-Software EVIEWS 6 von Quantitative Micro Software (QMS) erstellt.¹⁴

2.2.2 Test auf Stationarität

Im Verlauf der empirischen Untersuchung werden nicht die Kurszeitreihen $\{K_t\}$, sondern die Renditen der Kurse $\{r_t\}$ untersucht. Renditen einer Kurszeitreihe

¹¹Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 214.

¹²Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 55, 65.

¹³Vgl. <http://professional.teletrader.com>.

¹⁴Vgl. <http://www.eviews.com>.

können als diskrete oder stetige Renditen bestimmt werden. Unter einer diskreten Rendite wird die relative Kursveränderung verstanden und berechnet sich als Kursdifferenz $(K_t - K_{t-1})$ von einem Zeitpunkt zum nächsten, bezogen auf den Ausgangskurs (K_{t-1}) . Die entsprechende Bewertungsformel lautet

$$r_t^d = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}. \quad (2.15)$$

Wird die Differenz der logarithmierten Kurse gebildet, so erhält man die stetige Rendite:

$$r_t^s = \ln K_t - \ln K_{t-1} = \ln \left(\frac{K_t}{K_{t-1}} \right). \quad (2.16)$$

Zwischen beiden Definition 2.15 und 2.16 gelten die Beziehungen

$$r_t^s = \ln(r_t^d + 1) \quad (2.17)$$

$$r_t^d = e^{r_t^s} - 1. \quad (2.18)$$

Der Zusammenhang zwischen r_t^d und r_t^s ergibt sich durch eine *Taylor - Approximation* erster Ordnung.¹⁵ Der Unterschied zwischen beiden Definitionen ist also bei kleinen Renditen vernachlässigbar. Die stetige Rendite wird bei empirischen Untersuchungen präferiert. In dieser Arbeit wird daher ebenfalls die Formel für die stetige Rendite verwendet. Zusätzlich werden die ermittelten Renditen mit 100 multipliziert, so dass sich prozentuale Renditen ergeben.

Grundlage und Basis einer Zeitreihenanalyse ist die Überprüfung, ob die zu analysierende Zeitreihe die Eigenschaft der Stationarität innehat. Stationarität bedeutet, dass die Mittelwerte zeitunabhängig sind, und die Kovarianzen nur von der Zeitdifferenz τ der Beobachtungen abhängen.

Die in den Abbildungen 2.1 bis 2.6 abgebildeten Kurse weisen eine trendbehaftete Entwicklung auf, während die stetigen Renditezeitreihen um einen konstanten Mittelwert von null schwanken. Dies deutet auf nichtstationäre Kursreihen und stationäre stetige Renditezeitreihen hin. Eine Methode zur Überprüfung der Stationarität der Renditen ist der Augmented-Dickey Fuller-Test (ADF-Test).¹⁶ Die

¹⁵Vgl. Schmid, F.; Trede, M., Analyse, 2005, S. 5.

¹⁶Vgl. Dickey, D. A.; Fuller, W. A., Likelihood, 1981, S.1057-1072.

Testgleichung des ADF-Tests kann durch die Gleichung

$$\Delta r_t = \delta r_{t-1} \sum_{j=1}^m \alpha_j \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.19)$$

mit Δr_t als Veränderung der Renditen, ε_t als Störterm und α_j als Parameter formuliert werden. Die Annahme der Nichtstationarität bildet für den ADF-Test die Nullhypothese. Ist der Koeffizient δ der verzögerten Variablen r_{t-1} ungleich null, wird die Nullhypothese der Nichtstationarität der Renditen verworfen. Die Tabelle

Rendite	ADF-Test
<i>DAX</i>	−30.47268***
<i>EON</i>	−34.46244***
<i>E – Stoxx</i>	−34.55615***
<i>EADS</i>	−35.21662***
<i>Eur/US\$</i>	−32.85881***
<i>Brent</i>	−32.88131***
<i>Signifikanzniveau :</i>	*** = 0,01

Tabelle 2.2: Ergebnisse des ADF-Tests

2.2 fasst die Ergebnisse des ADF-Tests der hier untersuchten empirischen Renditezeitreihen zusammen, wobei der kritische Wert für ein Signifikanzniveau von 0,01 bei −3,4358 liegt. Bei allen sechs Renditezeitreihen entschied der ADF-Test bei einem Signifikanzniveau von 1% gegen das Vorliegen einer Unit-Root, da alle berechneten Werte unterhalb des kritischen Wertes von −3,4358 liegen. Die Annahme von Mittelwertstationarität der stetigen Renditen wurde somit bestätigt. Es wird daher im folgendem von Mittelwertstationarität der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Renditezeitreihen ausgegangen.

2.2.3 Statistische Eigenschaften der untersuchten Daten

Die Kurs- und Renditezeitreihen der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Zeitzeitreihen können den Abbildungen 2.1 bis 2.6 entnommen werden. Da die Renditezeitreihen keine erkennbaren statistischen Besonderheiten aufweisen, werden sogenannte Deskriptivmaße für eine präzise Beurteilung der statistischen Eigenschaften herangezogen. In der Tabelle 2.3 werden die wichtigsten statistischen Kennzahlen der

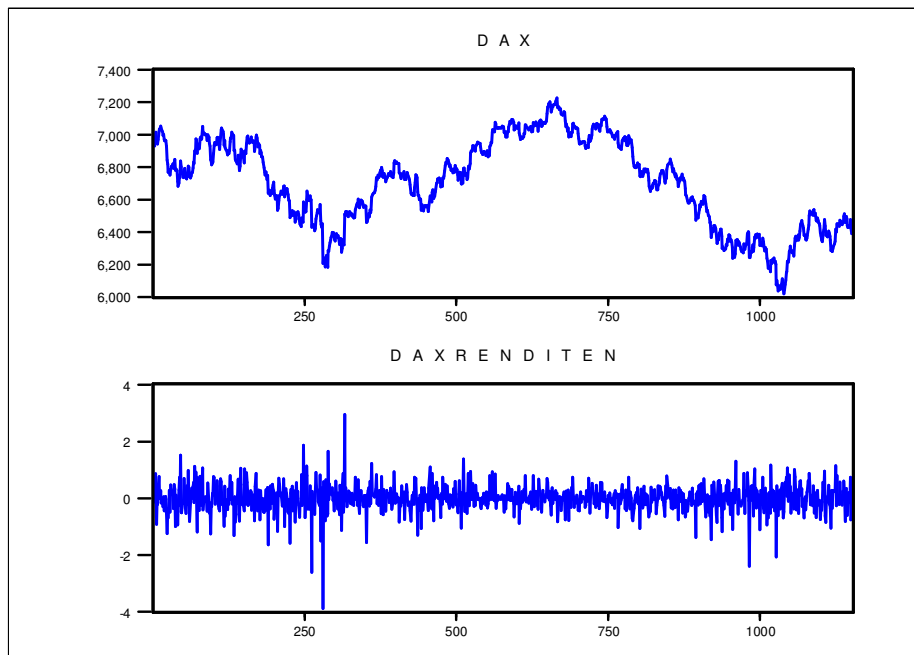


Abbildung 2.1: Stündliche Dax-Kurse und deren Renditen

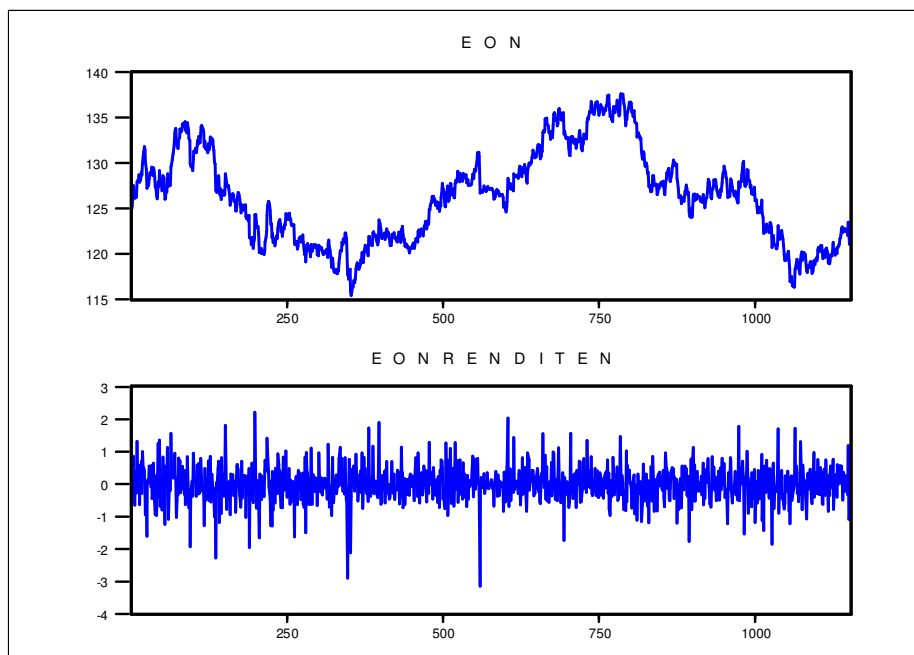


Abbildung 2.2: Stündliche Eon-Kurse und deren Renditen

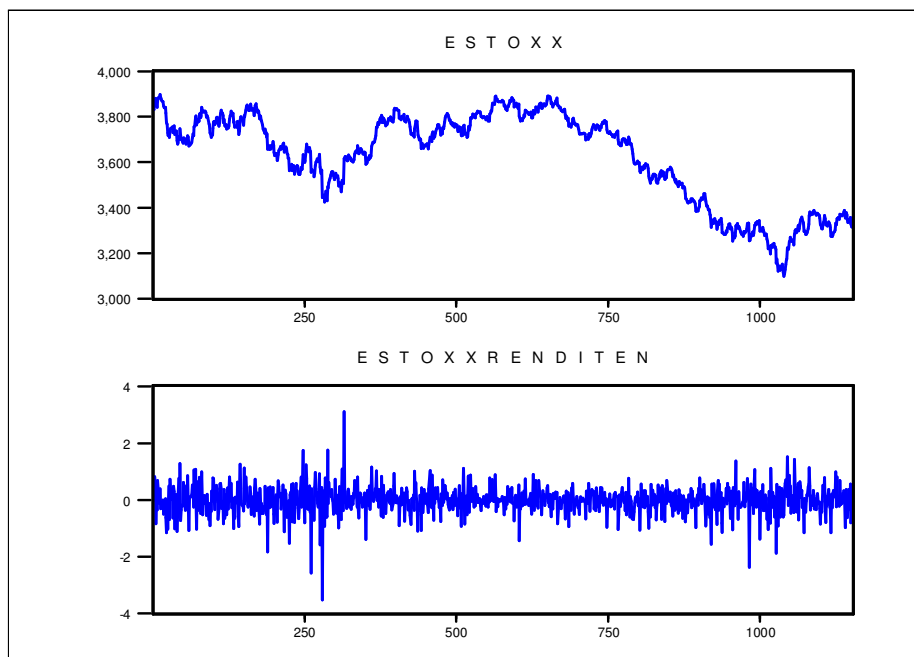


Abbildung 2.3: Stündliche E-Stoxx-Kurse und deren Renditen

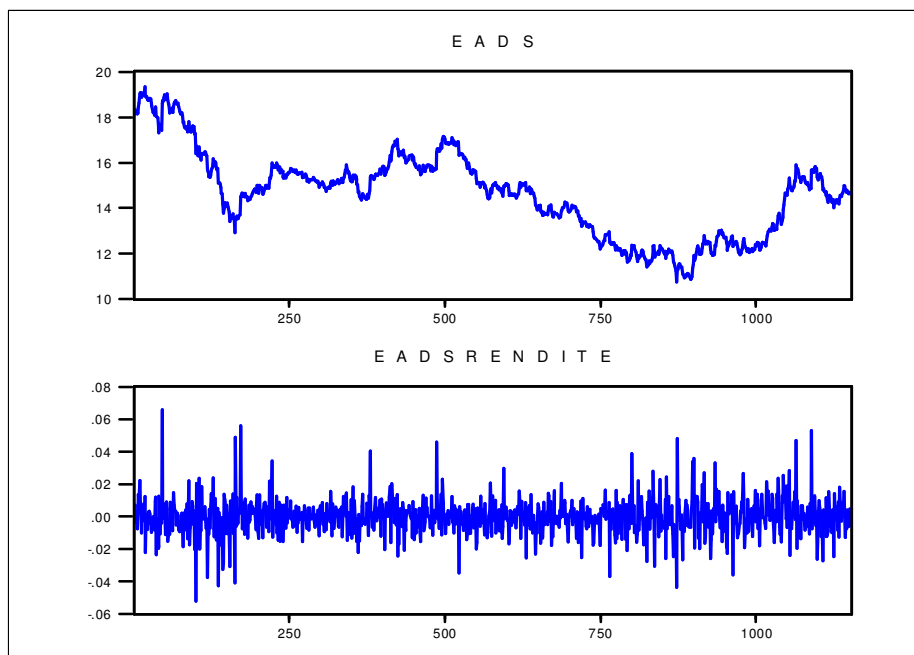


Abbildung 2.4: Stündliche EADS-Kurse und deren Renditen

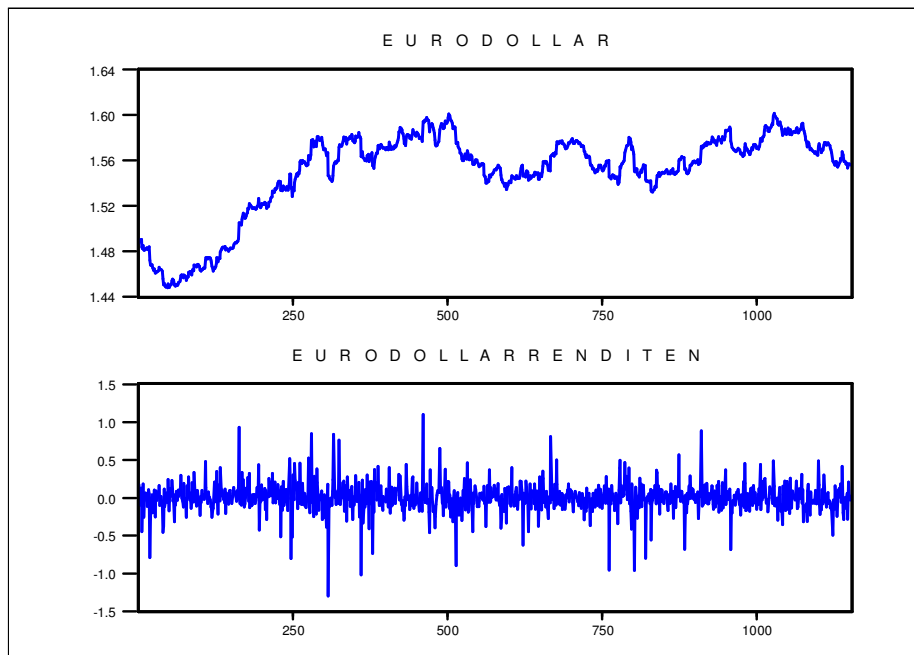


Abbildung 2.5: Stündliche Eur/US\$-Kurse und deren Renditen

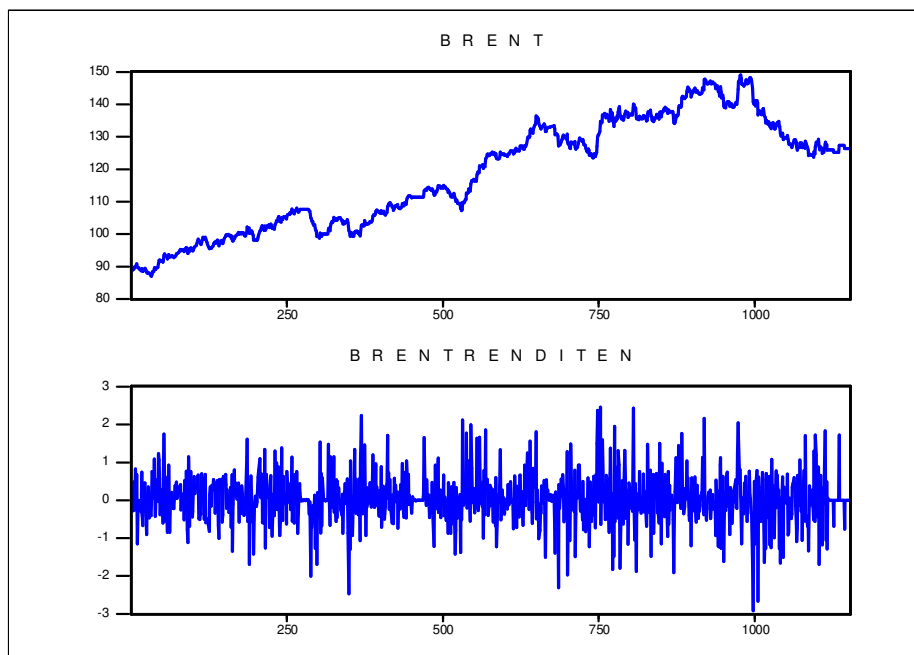


Abbildung 2.6: Stündliche Brent-Kurse und deren Renditen

prozentualen Renditen aufgeführt. Dabei wird für alle Zeitreihen der volle Beobachtungsumfang für die Analyse genutzt. Aufgeführt sind das arithmetische Mittel, der Median, das Maximum, das Minimum, die Standardabweichung, die Schiefe, die Kurtosis sowie die Jarque-Bera-Statistik (JB), die bei Normalverteilung mit zwei Freiheitsgraden χ^2 -verteilt ist.

	<i>DAX</i>	<i>E – Stoxx</i>	<i>EON</i>	<i>EADS</i>	<i>Eur/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M.</i>	−0.0074	−0.01255	−0.00249	−0.01864	0.00484	0.03019
<i>Median</i>	−0.01369	−0.00312	−0.00777	0.00000	0.00000	0.00000
<i>Max</i>	2.86431	3.09128	2.21237	6.60434	1.10379	2.46332
<i>Min</i>	−2.31204	−3.51535	−3.14748	−5.22684	−1.29771	−2.91966
<i>St.Abw.</i>	0.41482	0.46337	0.54331	1.07349	0.18752	0.63177
<i>Schiefe</i>	0.18076	−0.46982	−0.23063	0.43865	−0.34686	0.00589
<i>Kurtosis</i>	7.1645	9.57502	5.99930	7.94368	11.19804	5.31669
<i>JB</i>	838.014*	2115.632*	441.6294*	1209.016*	3246.259*	257.4024*

Signifikanzniveau : * = 0, 01.

Tabelle 2.3: Statistische Kennzahlen der Renditen

Die stündlichen Renditen der EADS-Kurse liegen zwischen $-5,23\%$ und $+6,61\%$, die anderen untersuchten Zeitreihen haben eine Spannweite von $-3,52\%$ und $+3,1\%$, das arithmetische Mittel der betrachteten Reihen ist annähernd gleich null und die unbedingte Standardabweichung liegt bis auf die EADS-Kurse deutlich unter eins, wobei die EADS-Kurse am stärksten variieren. Mit Hilfe der Schiefe können Aussagen über die Symmetrie der empirischen Renditeverteilungen gemacht werden. Die Schiefe einer symmetrischen Verteilung, wie der Normalverteilung, weist einen Wert von null auf. Es ist ersichtlich, dass die Werte für die Schiefe zwischen $-0,658$ und $+0,439$ liegen. Die DAX-Rendite, die EADS-Rendite und die Brent-Rendite haben einen positiven Wert für die Schiefe und sind somit rechtsschief. Alle anderen Renditen weisen negative Werte auf und haben eine linksschiefe Verteilung. Somit kann bei den untersuchten Reihen nicht von einer symmetrischen Verteilung ausgegangen werden. Eine weitere Maßzahl zur Charakterisierung der Form einer Verteilung ist die Kurtosis der Verteilung. Bei einer Normalverteilung hat die Kurtosis einen Wert von drei. Bestimmt man den Wert bei den hier zu untersuchenden empirischen Daten, so ist deutlich erkennbar, dass alle einen Wert größer als drei haben und somit deutlich höhere Gipfel und breitere Enden als bei Vorliegen einer Normalverteilung aufweisen. Somit kann von

einer leptokurtischen Verteilung der betrachteten Daten ausgegangen werden. Um die Annahme einer leptokurtischen Verteilung zu überprüfen, kann die Jarque-Bera-Statistik (JB-Statistik) herangezogen werden.¹⁷ Unter der Nullhypothese gilt asymptotisch

$$\begin{aligned}\hat{S} &\sim N(0, \sqrt{\frac{6}{T}}), \\ \hat{K} &\sim N(3, \sqrt{\frac{24}{T}}).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Dabei werden die Schiefe und die Kurtosis einer Verteilung benötigt. Außerdem sind \hat{S} und \hat{K} asymptotisch unabhängig. Deshalb ist für große T die Teststatistik

$$\tau = T \left(\left(\frac{\hat{S}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{K} - 3}{\sqrt{24}} \right)^2 \right)\tag{2.21}$$

approximativ χ^2 -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Man lehnt die Nullhypothese der Normalverteilung ab, wenn der Wert der Teststatistik größer ist als das $(1 - \alpha)$ -Quantil der χ^2 -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden. Bestätigt wird die Annahme einer leptokurtischen Verteilung der betrachteten Renditen durch die JB-Statistik zur Prüfung auf Normalverteilung. Das 99 %-Quantil einer mit zwei Freiheitsgraden χ^2 -verteilten Zufallsvariable ist 9,21.

Somit kann für die sechs untersuchten empirischen Renditenreihen die Nullhypothese einer Normalverteilung hoch signifikant verworfen werden.

Verdeutlicht werden die beschriebenen Ergebnisse, die auf eine Nicht-Normalverteilung der Renditen hindeuten, durch grafische Untersuchungen. Dazu werden die Kerndichteschätzungen der Dichtefunktion und der Quantil-Quantil-Plot (QQ-Plot) der untersuchten Reihen betrachtet. Für die Schätzungen in Abbildung 2.7 wurde ein Epanechnikov-Kern verwendet. Es wurde für jede Zeitreihe zum Vergleich, zusätzlich zu den Kerndichteschätzungen der Renditen, die Dichtefunktion einer angepassten Normalverteilungen der empirischen Renditezeitreihen eingezeichnet. Asymmetrien in den Daten sind in den grafischen Darstellungen kaum

¹⁷Vgl. Bera, A.; Jarque, C. M., Tests, 1980.

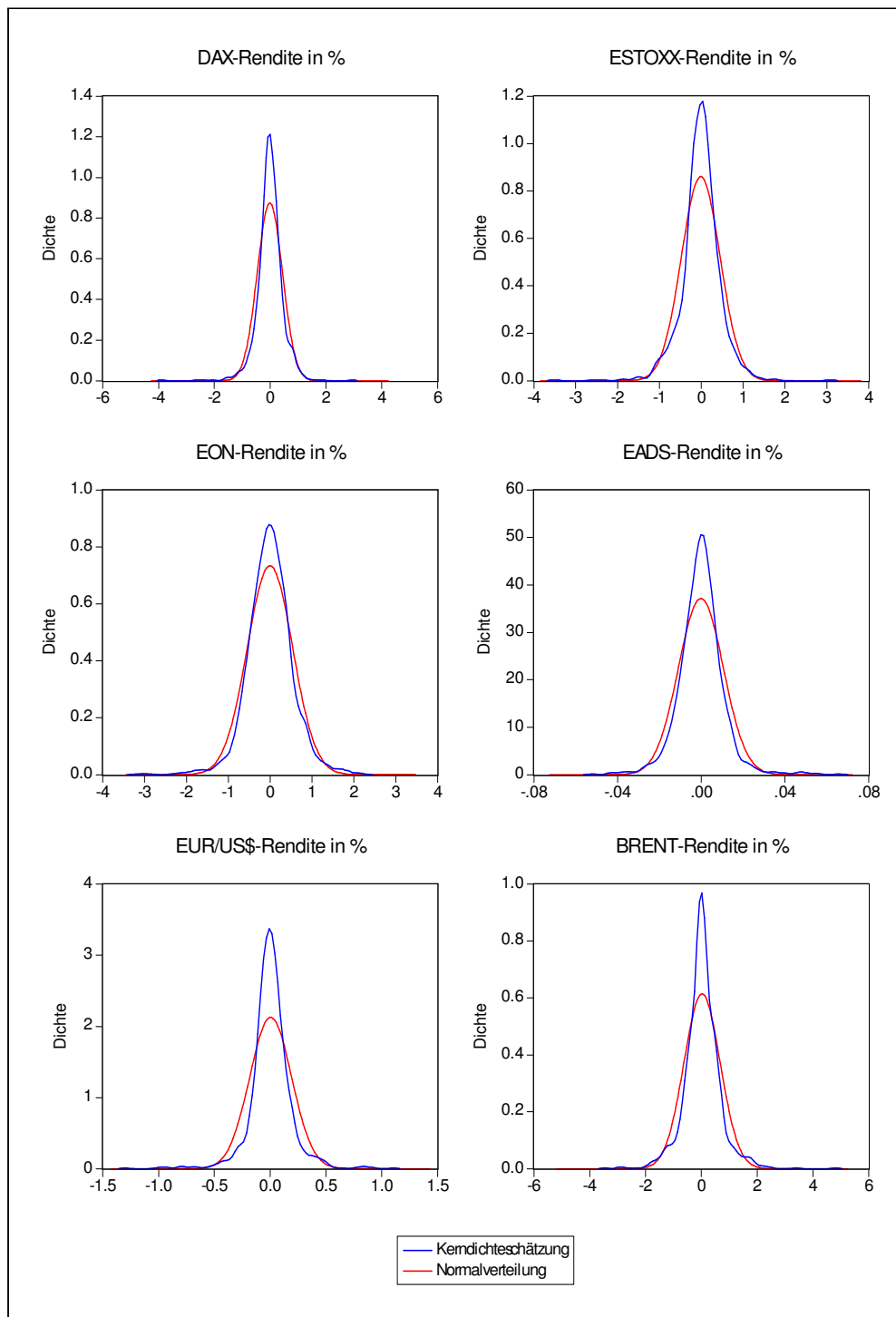


Abbildung 2.7: Kerndichteschätzung von den untersuchten Renditezeitreihen

zu erkennen. Dagegen wird bei allen sechs Grafiken deutlich, dass die Anzahl der empirischen Beobachtungen an den Enden sowie im Zentrum der Verteilung höher ist als durch die Normalverteilung postuliert wird. Diese Abweichung ist vor allem zurückzuführen auf die höhere Kurtosis der geschätzten Dichten und ist typisch für die Renditeverteilungen von Kapitalmarktdaten.

Abbildung 2.8 zeigt einen QQ-Plot für jede Renditezeitreihe. Der QQ-Plot vergleicht die Quantile der empirischen Verteilung mit den Quantilen einer Standardnormalverteilung. Stammen die empirischen Daten aus einer Normalverteilung, so liegen die Punkte des QQ-Plots nahe an den oder auf der Winkelhalbierenden. Liegt keine Normalverteilung vor, so läßt sich Schiefe durch Unterschiede auf beiden Seiten, erhöhte Leptokurtosis durch einen S-förmigen QQ-Plot und auftretende Ausreißer durch einzelne Punkte an den Rändern identifizieren. Hier erkennt man für die untersuchten Renditereihen deutliche Abweichungen von einer Geraden und somit von der Normalverteilung. Der S-förmige Verlauf der Punkte in dem QQ-Plot deutet zudem auf Leptokurtosis hin. Zusammenfassend kann von einer leptokurtischen Verteilung der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten stündlichen Renditereihen ausgegangen werden.

2.2.4 Autokorrelation der Renditen für Finanzmärkte

Im folgenden soll die Art der Korrelation der hier untersuchten Renditen überprüft werden. In den Abbildungen 2.1 bis 2.6 lassen sich, zumindest auf Grundlage der stündlichen Zeitreihen über einen Beobachtungszeitraum, die Zeitinkonsistenzen der Volatilitäten erkennen. Das Auftreten von großen bzw. kleinen Renditen, die tendenziell auf große bzw. kleine Kursänderungen folgen, ist deutlich zu erkennen. Dieses Muster wird auch als Volatilitäts-Cluster bezeichnet.¹⁸ Die Annahme der Unabhängigkeit der Renditen kann damit zumindest als unwahrscheinlich angesehen werden. Mit Hilfe des Ljung-Box-Tests kann diese Annahme bei den vorliegenden Daten überprüft werden.¹⁹ Unter der Nullhypothese fehlender Autokorrelation ist diese Teststatistik asymptotisch χ^2 -verteilt mit q Freiheitsgraden

¹⁸Vgl. Mandelbrot, B., Variation, 1963, S. 394-419.

¹⁹Vgl. Ljung, G. M.; Box, G. E. P., Measure, 1978, S. 297ff.

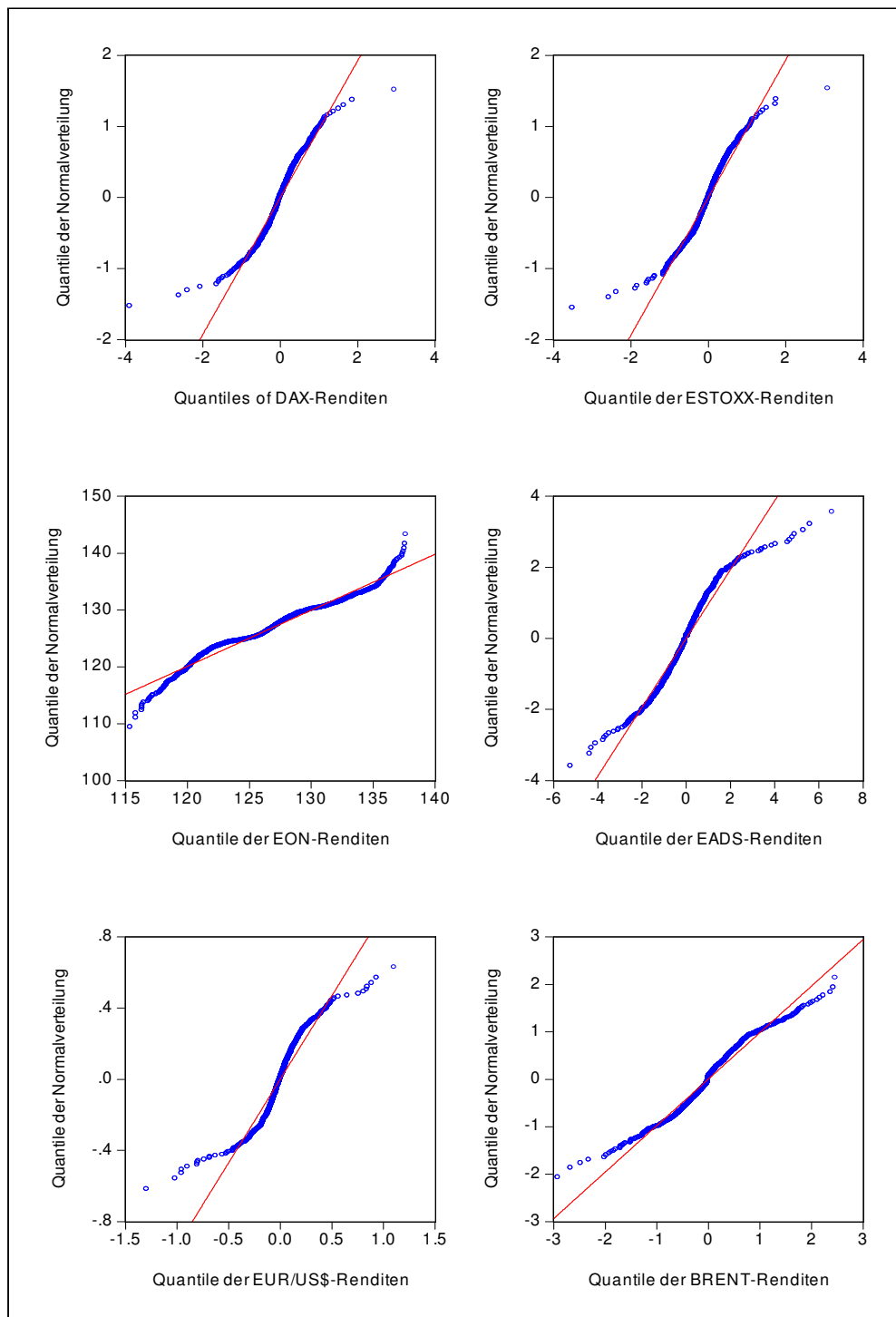


Abbildung 2.8: QQ-Plot der Renditezeitreihen und der Standardnormalverteilung

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{k=1}^i \frac{\rho_i^2}{T-k} \quad (2.22)$$

mit T als Anzahl der Beobachtungen und k als Laglänge. Sind die Werte der Testgröße Q_{LB} größer als die kritischen Werte, dann wird die Hypothese, dass die Zeitreihe einem White Noise Prozess folgt und somit keine Korrelationen zwischen den Realisationen der Zeitreihe existieren, verworfen.

<i>Reihe</i>	$Q(10)$	$Q(15)$	$Q(20)$	$Q(25)$	$Q(30)$
<i>Dax</i>	22.86**	25.72**	65.02***	67.54***	93.17***
<i>Eon</i>	36.57***	43.36***	52.48***	54.97***	63.44***
<i>E - Stoxx</i>	42.58***	50.39***	122.99***	128.38***	188.77***
<i>EADS</i>	36.70***	43.49***	74.44***	82.69***	114.39***
<i>Eur/US\$</i>	55.78***	57.97***	113.85***	116.18***	192.33***
<i>Brent</i>	22.63**	29.96**	39.45***	58.17***	71.14***

Signifikanzniveaus : ** = 0,05 *** = 0,01.

Tabelle 2.4: Ljung-Box-Statistik der quadrierten Renditen

Die Ergebnisse des Ljung-Box-Tests auf die stationären quadrierten Renditereihen fasst die Tabelle 2.4 zusammen. Für die hier untersuchten Renditereihen wird die Nullhypothese serieller Korrelation bei allen quadrierten Renditen meist hochsignifikant abgelehnt, so dass von einer starken zeitlichen Abhängigkeit in den bedingten Varianzen ausgegangen werden kann.

2.3 Lineare stochastische Prozesse

In den Anwendungen der Zeitreihenanalyse haben die linearen stochastischen Prozesse eine besondere Bedeutung. Ihre Abhängigkeitsstruktur wird durch lineare Verknüpfungen von beobachtbaren Zufallsvariablen X_t und Zufallsschocks modelliert. Bei der Modellierung von stationären Zeitreihen stehen folgende Modelltypen für die Analyse zur Verfügung: der autoregressive Prozess p-ter Ordnung, der Moving Average Prozess q-ter Ordnung und der ARMA-Prozess(p, q) ter Ordnung. Diese Modelle werden im Folgenden vorgestellt und es wird eine Modellierung des

empirischen Datenmaterials dieser Arbeit anhand der ARMA-Modelle vorgenommen.

2.3.1 Autoregressiver Prozess

Betrachtet man einen stochastischen Prozess X_t der Form

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.23)$$

erkennt man, dass X_t linear von der gewichteten Summe seiner historischen Werte abhängt. Dabei ist (ε_t) ein White-Noise-Prozess²⁰ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_p \neq 0$ eine beliebige Konstante. Die Anzahl der Lags p der verzögerten Variablen X_{t-p} bestimmt die Ordnung des Prozesses. Daher heißt dieser Prozess **AutoRegressiver Prozess** der Ordnung p (AR(p)-Prozess).²¹ Der Name autoregressiver Prozess rührt von der formalen Ähnlichkeit des Modells mit den klassischen multiplen Regressionsansätzen, wobei hier verzögerte Werte der Zeitreihe mit stochastischem Charakter an die Stelle der exogenen Faktoren getreten sind.

Die einfachste Form dieser Prozesse ist ein autoregressiver Prozess erster Ordnung (AR(1)-Prozess), bei dem der aktuelle Wert von dem vorherigen Wert bestimmt wird, dieser wird auch als Markov-Prozess bezeichnet.

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.24)$$

Anhand dieses Prozesses kann leicht gezeigt werden, dass die Erwartungswerte und Varianzen konstant und zeitunabhängig sind. Für die Erwartungswertfunktion gilt

$$\begin{aligned} \mu_x &= E(X_t) \\ &= \alpha_1 E(X_{t-1}) + 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

für $t \in \mathbb{Z}$. Es kann μ_x für $\alpha_1 \neq 1$ nur dann konstant sein, wenn $\mu_x = 0$ ist. Für

²⁰Ein White-Noise-Prozess (Weißes Rauschen) ist ein rein zufälliger Prozess. Die Zufallsvariablen ε_t sind unabhängig und identisch verteilt. Das heißt, es gilt $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ für alle $t \in T$ und $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t^*}) = 0$ für alle $t, t^* \in T$ mit $t \neq t^*$.

²¹Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 121f.

die Varianzfunktion gilt

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \text{Var}(X_t) \\ &= \alpha_1^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Falls σ_x^2 konstant ist, folgt

$$\sigma_x^2 = \alpha_1^2 \sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Daraus folgt

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha_1^2},\tag{2.27}$$

d.h. $\alpha_1^2 < 1 \Leftrightarrow |\alpha_1| < 1$. Ist diese Bedingung erfüllt wird der AR(1)-Prozess als stationär betrachtet. Die Autokovarianzfunktion $\gamma(\tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t-\tau})$ ist dann für $\tau \geq 1$

$$\begin{aligned}\gamma_x(\tau) &= E(X_t X_{t-\tau}) \\ &= E((\alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-\tau}) \\ &= \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-\tau}) + 0 \\ &= \alpha_1 \gamma_x(\tau - 1).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\gamma_x(\tau) &= \alpha_1^\tau \gamma(0) \\ &= \alpha_1^\tau \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha_1^2}\end{aligned}\tag{2.29}$$

für $\tau \geq 0$. Die Autokorrelationsfunktion für einen AR(1)-Prozesses lautet dann

$$\rho_\tau(t) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \alpha_1^\tau.\tag{2.30}$$

Für einen stationären AR(1)-Prozess zeigt die Autokorrelationsfunktion ein exponentiell abnehmendes Verhalten.

Sei X_t ein AR(p)-Prozess gemäß 2.24 dann ergibt sich für diese Gleichung

alternativ

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) X_t &= \varepsilon_t \\
 \alpha(L) X_t &= \varepsilon_t \\
 \text{mit } \alpha(L) &:= (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p)
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Da ein AR(p)-Prozess sowohl stationär als auch nichtstationär sein kann, existieren sogenannte Stationaritätsbedingungen.²² Demnach ist ein autoregressiver Prozess der Ordnung p genau dann stationär, wenn die Wurzeln (= Lösungen für L) der charakteristischen Gleichung

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) = 0 \tag{2.32}$$

außerhalb des Einheitskreises liegen.

Box und Jenkins²³ zeigen, dass die Autokorrelationsfunktion stationärer autoregressiver Prozesse entweder exponentiell gegen null und/oder in Form von gedämpften Sinuswellen gegen null konvergiert. Die partielle Autokorrelationsfunktion ist als Folge von Autokorrelationskoeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{pp}$ definiert und dient dazu, die Ordnung p linearer Prozesse zu bestimmen. Mit Hilfe der Yule-Walker-Gleichungen können die partiellen Autokorrelationskoeffizienten bestimmt werden. Dieses lineare Gleichungssystem läßt sich für beliebige p lösen und ergibt die gesuchten Werte der partiellen Autokorrelationskoeffizienten. Für einen autoregressiven Prozess p-ter Ordnung sind die partiellen Autokorrelationskoeffizienten $\alpha_{kk} = \alpha_k$ von null verschieden, wenn $k \leq p$ ist und für alle $k > p$ gleich null. Somit wird ein Prozess genau dann als AR(p)-Prozess identifiziert, wenn die partielle Autokorrelationsfunktion nach einem Lag der Länge p abbricht.

2.3.2 Moving-Average-Prozess

Betrachtet man einen stochastischen Prozess X_t der Form

²²Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 55.

²³Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 55.

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.33)$$

erkennt man, dass X_t aus der Summe gegenwärtiger und vergangener Störterme gebildet wird. Dabei ist (ε_t) ein White-Noise-Prozess²⁴ und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, \beta_q \neq 0$ eine beliebige Konstante. Einen solchen Prozess bezeichnet man als Moving-Average-Prozess q -ter Ordnung (MA(q)-Prozess).²⁵ Das maximale Lag q der verzögerten Störterme (Schocks) bestimmt die Ordnung des MA(q)-Prozesses.

MA(q)-Prozesse können auch alternativ formuliert werden als

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q) \varepsilon_t \\ X_t &= \beta(L) \varepsilon_t \\ \text{mit } \beta(L) &:= (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Moving-Average-Prozesse setzen sich aus unabhängigen Zufallsschocks zusammen. Der aktuelle Wert X_t ist dann das gewichtete Mittel aus gegenwärtigen und vergangenen Schocks. Da der Störprozess ε_t stationär ist, sind MA-Prozesse immer stationär. Deswegen sind MA-Prozesse definitionsgemäß stationär.

Für die Erwartungswertfunktion eines MA(q)-Prozesses gilt

$$\begin{aligned} \mu_x &= E(X_t) \\ &= \beta(L) E(\varepsilon_t) = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

da $E(\varepsilon_t) = 0$ für alle t . Der Erwartungswert ist unabhängig von t .

Für die Varianzfunktion gilt

²⁴Ein White-Noise-Prozess (Weißes Rauschen) ist ein rein zufälliger Prozess. Die Zufallsvariablen ε_t sind unabhängig und identisch verteilt. Das heißt, es gilt $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ für alle $t \in T$ und $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t^*}) = 0$ für alle $t, t^* \in T$ mit $t \neq t^*$.

²⁵Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, 2001, S. 116f.

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \text{Var}(X_t) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^q \beta_i^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Die Autokovarianzfunktion lautet:

$$\begin{aligned}
\gamma_x(\tau) &= \sum_{u=0}^q \sum_{v=0}^q \beta_u \beta_v \gamma_\varepsilon(\tau + u - v) \\
&= \begin{cases} 0 & \tau > q \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau} & 0 \leq \tau \leq q \\ \gamma_x(-\tau) & \tau < 0 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Somit ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion:

$$\rho_\tau(t) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 0 & \tau > q \\ \left(\sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau} \right) / \left(\sum_{u=0}^q \beta_u^2 \right) & 0 < \tau \leq q \\ 1 & \tau = 0 \\ \rho(-\tau) & \tau < 0. \end{cases}. \tag{2.38}$$

Die Autokorrelationsfunktion bricht nach einem Lag der Länge q ab. Da die exakte Bestimmung der partiellen Autokorrelationsfunktion mit hohem Aufwand verbunden ist, weisen Box und Jenkins lediglich auf ihren charakteristischen Verlauf hin.²⁶ Die partielle Autokorrelationsfunktion strebt in Form einer gedämpften Exponentialfunktion gegen Null, wenn die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\beta(L) = (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q) = 0 \tag{2.39}$$

reel sind. Komplexe Nullstellen führen hingegen zu einem asymptotischen Abklingen der partiellen Autokorrelationsfunktion gegen Null in Form gedämpfter

²⁶Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 71.

Sinuswellen.

2.3.3 Autoregressive-Moving-Average-Prozesse

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass der größte Teil der beobachteten ökonomischen Zeitreihen durch die AR(p)- und MA(q)-Prozesse nicht adäquat erfaßt wird. Die meist komplexeren Beziehungen in einer Zeitreihe können jedoch häufig durch eine Kombination der oben vorgestellten Prozesse beschrieben werden. Diese Überlegungen führen zu den Autoregressive-Moving-Average-Prozessen, die zudem das Prinzip der Sparsamkeit besser erfüllen als die AR- und MA-Prozesse.

Betrachtet man einen stochastischen Prozess X_t der Form

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

erkennt man, dass X_t abhängig von der historischen Entwicklung der Daten und den gewichteten Einflüssen exogener Schocks ist. Dabei ist (ε_t) ein White-Noise-Prozess. Einen solchen stochastischen Prozess bezeichnet man als Autoregressive-Moving-Average-Prozess der Ordnung (p, q) (ARMA(p,q)-Prozess).²⁷

ARMA(p,q)-Prozesse können auch alternativ definiert werden als

$$\alpha(L)X_t = \beta(L)\varepsilon_t \quad (2.41)$$

mit $\alpha(L) = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p)$ und $\beta(L) = (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q)$.

Der ARMA(p, q)-Prozess hat die gleiche Stationaritätsbedingung wie ein AR(p)-Prozess, d.h. alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung des AR-Teils müssen außerhalb des Einheitskreises liegen, also betragsmäßig größer als eins sein. Liegen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des MA-Teils außerhalb des Einheitskreises, ist der ARMA(p, q)-Prozess invertierbar.²⁸ Die Autokorrelationsfunktion

²⁷Vgl. Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J. Zeitreihenanalyse, 2001, S. 132ff.

²⁸Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 74.

eines ARMA(p, q)-Prozesses kann in Anlehnung an die Herleitung der Autokorrelationsfunktion eines AR(p)-Prozesses mit Hilfe der Yule-Walker-Gleichungen bestimmt werden. Somit ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion

$$\rho_\tau = \alpha_1 \rho_{\tau-1} + \alpha_2 \rho_{\tau-2} + \dots + \alpha_p \rho_{\tau-p} \quad \text{mit } \tau \geq q + 1, \quad (2.42)$$

die mit einem Lag von $(q - p)$ Perioden in Form einer gedämpften Exponentialfunktion und/oder gedämpfter Sinuswellen gegen Null strebt.²⁹ Die Autokorrelationsfunktion eines ARMA(p, q)-Prozesses genügt also für $\tau \geq q + 1$ derselben Beziehung wie ein AR(p)-Prozess. Dabei werden die ersten q Werte $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ durch den MA-Term beeinflusst.

Zur Bestimmung der partiellen Autokorrelationsfunktion ist die folgende Umformung der Gleichung (2.41) vorzunehmen

$$\varepsilon_t = \alpha^{-1}(L)X_t\beta(L), \quad (2.43)$$

wobei $\alpha^{-1}(L)$ eine unendliche Reihe bildet. Somit verhält sich die partielle Autokorrelationsfunktion eines ARMA(p,q)-Prozesses nach $(q - p)$ Perioden wie die partielle Autokorrelationsfunktion eines reinen MA(q)-Prozesses.³⁰ In der Tabelle 2.5 sind die Zusammenhänge der charakteristischen Verläufe der Autokorrelationsfunktion und der partiellen Autokorrelationsfunktion für die aufgeführten stochastischen Prozesse dargestellt.

	AR-Prozess	MA-Prozess	ARMA-Prozess
AKR	unendlichgedämpfte Exponentialfkt oder Sinuswellen	endlich, bricht nach Lag q ab	wie AR(p) ab $\tau > q$
partielle AKR	endlich, bricht nach Lag q ab	unendlichgedämpfte Exponentialfkt oder Sinuswellen	wie MA(q) ab $\tau > p$

Tabelle 2.5: Verhalten für Autokorrelationsfunktion und partieller Autokorrelationsfunktion bei verschiedenen Prozesstypen

²⁹Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 75f.

³⁰Vgl. Box, G. E.; Jenkins, G. M., Time, 1970, S. 75f.

Die bisher diskutierten ARMA-Modelle stellen ein hilfreiches Instrument zur Modellierung von stationären Zeitreihen dar, da in diesem Fall die Parameter und die Momentenfunktion leicht zu bestimmen sind. Die meisten ökonomischen Zeitreihen weisen jedoch einen Trend auf und sind deswegen nichtstationär. In diesem Fall kann die Zeitreihe nicht mehr adäquat durch ihre Momente beschrieben werden. Um auch nichtstationäre Zeitreihen beschreiben zu können, muss die Zeitreihe durch geeignete Differenzenbildung stationarisiert werden.³¹ Die trendbereinigte Reihe kann dann durch einen ARMA(p, q)-Prozess modelliert werden.

Außerdem wird, um nichtstationäre Zeitreihen beschreiben zu können, der Differenzenoperator $\Delta := 1 - L$ eingeführt. Das Modell, dessen d-te Differenz (ΔX_t) einem stationären ARMA(p, q) Prozess entspricht, wird als Autoregressive-Integrated-Moving-Average-Prozess der Ordnung (p, d, q) ARIMA(p, d, q) bezeichnet.

Formal ausgedrückt folgt

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \quad (2.44)$$

dem stationären ARMA(p, q)-Prozess

$$\alpha(L)\Delta X_t = \beta(L)\varepsilon_t. \quad (2.45)$$

Der zur Stationarisierung notwendige Differenzierungsgrad (d) wird durch die Anzahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des AR-Teils eines Prozesses bestimmt, die auf dem Einheitskreis liegen.

Ausgehend von den gezeigten stochastischen Prozessen ist es das wesentliche Ziel der Zeitreihenanalyse, eine vorhandene Zeitreihe in ein lineares Modell so anzupassen, dass die Struktur der Daten bestmöglich wiedergegeben wird, und die geschätzten Modellparameter eine Prognose in Form einer statistischen Extrapolation ermöglichen.

³¹Es existieren verschiedene Techniken zur Stationarisierung ökonomischer Zeitreihen. Vgl. Hartung, J., Statistik, 1989, S. 673ff und Schlittgen, R.; Streitberg, B.H.J. Zeitreihenanalyse, 2001, S. 25ff.

2.3.4 Schätzung und empirische Ergebnisse von ARMA-Modellen

Die Modellierung der finanzwirtschaftlichen Zeitreihen durch die Verwendung von ARMA(p, q)-Modellen ist in der Praxis weit verbreitet. Für die Formulierung und Schätzung eines ARMA(p, q)-Modells müssen die Ordnungen p und q festgelegt werden, um den Modelltyp zu bestimmen. Hierzu ist eine Betrachtung des Korrelogramms notwendig, wobei mittels der Autokorrelationsfunktion die Ordnung q des MA-Terms ermittelt wird und mittels der partiellen Autokorrelationsfunktion die Ordnung p des AR-Terms. Da idealtypische Autokorrelationsfunktionen in der Praxis nicht so häufig vorkommen, müssen meist verschiedene Modellspezifikationen vorgenommen werden, um zu prüfen, welches Modell die linearen Strukturen am besten aus den verwendeten Daten entfernt.

Um eine Überspezifikation des optimalen ARMA-Modells zu vermeiden, erfolgt eine Beschränkung auf maximal vier Komponenten, zwei AR-Terme und zwei MA-Terme. Durch diese Beschränkung ergibt sich ein geeigneter Kompromiss zwischen einer umfassenden, vollständigen Modellspezifikation und einer Beschränkung auf die wesentlichen Modellteile. Dabei wird das optimale Modell anhand des Schwarz-Bayes-Informationskriterium (SIC), bei dem der SIC-Wert möglichst gering sein soll, getroffen.³² Die Schätzergebnisse für die ARMA-Modelle für die das im Rahmen zu analysierende Datenmaterial sind in Tabelle 2.6 aufgelistet.

Aus Tabelle 2.6 sind die jeweiligen Ordnungsstufen der gefundenen AR- und MA-Komponenten für die untersuchten Renditezeitreihen erkennbar. Durch die Verwendung einer Ordnungsbeschränkung sind die ermittelten Spezifikationen durchweg niedriger Ordnung. Diese läßt auf kurzfristige Abhängigkeiten in den Renditen schließen. Die ermittelten Parameter der ARMA-Modelle sind signifikant von null verschieden und bestätigen somit die linearen Abhängigkeiten für die untersuchten Finanzmarktdaten. Bei allen untersuchten Renditereihen besitzt die AR(1)-Komponente eine signifikante Wirkung auf den aktuellen Wert. Da bei vier dieser autoregressiver Wert erster Ordnung positiv ist, handelt es sich um einen

³²Vgl. Schwartz, G., Dimension, 1978, S. 461-464.

<i>ARMA</i>	<i>AR(1)</i>	<i>AR(2)</i>	<i>MA(1)</i>	<i>MA(2)</i>
<i>Dax</i>	0.1044* (3.0865)			
<i>Eon</i>	0.8439* (11.6419)		-0.8932* (-14.2263)	
<i>E - Stoxx</i>	0.2778* (10.9626)	-0.9301* (-34.8879)	-0.3185* (-15.4431)	0.9566* (43.6624)
<i>EADS</i>	-0.7251* (-2.5925)		0.6854** (2.2833)	
<i>Eur/US\$</i>	0.1306* (15.1614)	-0.9661* (-100.5533)	-0.1188* (-29.9765)	0.9949* (225.6785)
<i>Brent</i>	-0.73* (-5.4919)	-0.8522* (-7.9656)	0.7587* (5.3994)	0.8373* (7.2303)

Signifikanzniveaus : ** = 0,05 * = 0,01.

Tabelle 2.6: Schätzungen der ARMA-Modelle

gleichgerichteten Wirkungszusammenhang.³³ Allerdings übt der zweite autoregressive Koeffizient, der bei drei Schätzungen vorkommt, einen stärkeren Einfluß aus. Bei fünf Modellschätzungen besitzt auch der MA(1) Koeffizient einen signifikanten Einfluß, d.h. Schocks werden nicht unmittelbar verarbeitet, sie haben immer auch eine verzögerte Wirkung auf die künftige Renditeentwicklung. Auch hier übt der weiter zurückliegende signifikante MA(2)-Koeffizient bei drei Schätzungen einen stärkeren Einfluß aus.

2.3.5 Beurteilung der Modellschätzung durch ARMA-Modelle

Um festzustellen, ob die Modellschätzungen in der Lage sind, die Renditezeitreihen adäquat zu modellieren, werden die Residuen einer Analyse unterzogen. Dies erlaubt, die Schätzung anhand einiger Kriterien zu beurteilen. Dafür werden die Schiefe und die Kurtosis als die wichtigsten statistischen Kennzahlen der Modellschätzungen in der Tabelle 2.7 gezeigt. Zusätzlich enthält die Tabelle die Ergebnisse des Ljung-Box-Tests, das Schwarz-Bayes-Informationskriterium (SIC) sowie die Jarque-Bera-Statistik (JB).

Der SIC-gibt den Wert an, mit dem das ideale Modell für die jeweilige Rendi-

³³Aus der Tabelle 2.6 ist ersichtlich, dass es sich bei den beiden Ausnahmen um die Renditen von EADS und Brent handelt.

<i>ARMA</i>	<i>Schiefe</i>	<i>Kurtosis</i>	<i>Q(10)</i>	<i>SIC</i>	<i>JB</i>
<i>DAX</i>	0.2522	7.391	22.613*	1.073575	936.0819*
<i>EON</i>	-0.2608	6.0192	37.020*	1.619239	449.8298*
<i>E – Stoxx</i>	-0.5663	9.5774	35.114*	1.304222	2132.662*
<i>EADS</i>	0.4233	7.8098	37.103*	2.988671	1142.886*
<i>EUR/US\$</i>	-0.31347	10.7758	57.818*	-0.504457	2916.045*
<i>Brent</i>	0.008	5.2837	21.686*	1.940659	249.6984*

*Signifikanzniveau : * = 0,01.*

Tabelle 2.7: Beurteilung der ARMA-Schätzungen

tereihe ausgewählt wurde. Die Werte für den Ljung-Box-Test sind für den Lag 10 angegeben. Die quadrierten Residuen einer gut geschätzten ARMA-Modellierung weisen im optimalen Fall keine Korrelationen auf. Entsprechend sollte die Nullhypothese dieses Tests – keine Korrelationen – nicht abgelehnt werden. Allerdings weist der Ljung-Box-Test bei der ARMA-Modellierung der Renditereihen starke signifikante Abweichungen auf, so dass die Nullhypothese abgelehnt werden muss. Eine sich daraus ableitende notwendige Neuspezifikation der Modellierung wurde versucht, erbrachte aber keine Ergebnisverbesserung. Zur Residuenanalyse gehört, neben der Prüfung serieller Autokorrelation, noch ein Test, der die Residuen auf Normalverteilung prüft. Während hierbei das arithmetische Mittel und die Standardabweichung beliebige Werte annehmen können, sind die Wertgrößen für die Schiefe mit null und die Kurtosis mit drei eindeutig festgelegt. Ob die Residuen der geschätzten ARMA-Modellierung einer Normalverteilung folgen, soll mit Hilfe des Jarque-Bera-Tests ermittelt werden. Die in der Tabelle 2.7 aufgeführten Werte des Jarque-Bera-Tests weisen für die sechs Modellschätzungen eine hoch signifikante Ablehnung der Nullhypothese einer Normalverteilung auf und sind weiterhin leptokurtisch verteilt. Dieses Ergebnis überrascht nicht, da bereits die Analyse der Renditezeitreihen aus Tabelle 2.3 ergab, dass keine Normalverteilung vorliegt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass ARMA-Modelle nicht in der Lage sind, die im Rahmen dieser Arbeit zu untersuchenden Renditezeitreihen adäquat zu modellieren, da ARMA-Modelle grundsätzlich nur die linearen Abhängigkeiten von Zeitreihen berücksichtigen.

Kapitel 3

Die Volatilität bei Finanzmarktdaten

In den Renditen des hier verwendeten Datenmaterials wurden lineare Abhängigkeiten mit Hilfe der signifikanten Ljung-Box-Teststatistik für die Autokorrelation der quadrierten Renditen nachgewiesen. Diese Ergebnisse zeigen, dass ausgeprägte nichtlineare Abhängigkeiten in dem Datenmaterial dieser Arbeit vorkommen. Darüberhinaus sind die Renditen des in dieser Arbeit untersuchten Datenmaterials durch Leptokurtosis gekennzeichnet, d.h. dass die Verteilung der Renditen an den Rändern über der einer Normalverteilung liegt. Die Kurtosis ist somit wesentlich höher als die Kurtosis bei der Normalverteilung.

Um eine Verbesserung der Modellierung des Datenmaterials in dieser Hinsicht zu erreichen, werden daher im Folgenden diese nichtlineare Abhängigkeiten in den Renditereihen berücksichtigt. Die Renditen der in dieser Arbeit untersuchten Finanzmarktdaten neigen zu einer dynamischen Entwicklung, in welcher sich Perioden geringer und hoher Volatilität gegenseitig ablösen. Dieses Muster wird als Volatility Clustering bezeichnet. Die Abbildungen 2.1 bis 2.6 illustrieren, wie sich das Volatility Clustering in der Struktur beobachteter Zeitreihen äussert. Unter Volatilität wird generell der Schwankungsbereich der annualisierten Standardabweichung der betrachteten Renditen von Investitionsanlagen oder Finanzmärkten verstanden. Damit ist sie eine mathematische Größe für das Maß des Risikos einer Kapitalanlage. Somit kommt der Volatilität eine entscheidene Rolle bei der Beur-

teilung eines Anlagerisikos zu. Die ursprünglich bestehende Annahme einer konstanten Wertpapiervolatilität bei Kapitalmarktmodellen wurde im Laufe der Zeit durch empirische Arbeiten für unrealistisch befunden.³⁴ Dieses Erkenntnis macht eine speziell auf finanzwirtschaftliche Zeitreihen zugeschnittene Modellierung unerlässlich.

Im Hinblick auf diese Herausforderung war es schließlich der große Durchbruch, als Modelle mit autoregressiver bedingter Heteroskedastie (**ARCH**³⁵) zur Beschreibung von finanzwirtschaftlichen Zeitreihen entwickelt worden sind. Der entscheidende Unterschied zwischen diesem Ansatz und der klassischen Zeitreihenanalyse besteht in der Modellierung der bedingten Varianz als Funktion der vorhandenen Informationsmenge. Durch die revolutionäre Arbeit von Engle³⁶ hat die Volatilitätsanalyse von Finanzmarktdaten einen entscheidenden Impuls erhalten. Einen weiteren Meilenstein in diesem Bereich stellt das Generalized-Autoregressive-Conditional-Heteroskedasticity-Model (**GARCH**) von Bollerslev³⁷ dar, der mit der Übertragung des Sparsamkeitsprinzips von Box und Jenkins auf die vorliegende Problemstellung erst die Voraussetzungen für eine praktische Anwendung geschaffen hat. Mittlerweile gibt es eine sehr umfangreiche Anzahl von Veröffentlichungen zu der Theorie und Anwendung von (G)ARCH-Modellen. Einen Überblick über die relevanten Arbeiten der **GARCH**-Modelle und ihrer Eigenschaften verschaffen dabei die Artikel von Bollerslev, Chou und Kroner³⁸, Bera und Higgins³⁹ sowie Bollerslev, Engle und Nelson⁴⁰ (1994).

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die Modelle der ARCH-Klasse zur empirischen Überprüfung von nichtlinearen Abhängigkeiten herangezogen werden können. Für die empirischen Untersuchungen wurde dasselbe Datenmaterial wie in Kapitel 2 für die Analyse von Zeitreihen verwendet. Die Renditereihen des hier zu verwendeten Datenmaterials wurden dabei mit ausgewählten ARCH- und GARCH-Spezifikationen modelliert. Zum Abschluß des Kapitels wird auf die Kapitalmarktdef-

³⁴Vgl. Mandelbrot, B., Variation, 1963 und Fama, E., Behavior, 1965.

³⁵**A**utoregressive-**C**onditional-**H**eteroskedasticity-Model.

³⁶Vgl. Engle, R.F., Heteroscedasticity, 1982, S. 987-1007.

³⁷Vgl. Bollerslev, T., Generalized, 1986, S. 307-327.

³⁸Vgl. Bollerslev, T. et al., ARCH, 1992, S. 5-59.

³⁹Vgl. Bera, A. K.; Higgins, M. L., ARCH, 1993, S. 305-366.

⁴⁰Vgl. Bollerslev, T. et al., ARCH, 1994, S. 2959-3038.

fizienz von Finanzmarktdaten eingegangen und ein zusammenfassender Vergleich der empirischen Untersuchungsergebnisse vorgenommen.

3.1 ARCH-Modell

Ausgangspunkt der Entwicklung des “Autoregressive conditional heteroskedastic” (ARCH)-Modells war für Engle die Modellierung der Varianz der Störgröße.⁴¹ Durch das Akronym **ARCH** kommt zum Ausdruck, dass die bedingte Varianz eines ARCH-Prozesses von den vergangenen Beobachtungen des Prozesses selbst abhängt. In allgemeiner Form lassen sich ARCH-Modelle darstellen durch:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad (3.2)$$

$$v_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.3)$$

$$\sigma_t^2 | \phi_{t-1} = f(\phi_{t-1}). \quad (3.4)$$

Hierbei bezeichnet y_t die Rendite des Finanztitels, μ den Mittelwert der Renditen und ε_t kann als unerwarteter Kursausschlag (Residuum) zum Zeitpunkt t interpretiert werden. v_t ist ein unabhängig und identisch verteilter White-Noise-Prozess mit $Var(v_t) = 1$, für den zumeist Normalverteilung angenommen wird. ϕ_{t-1} kennzeichnet die Menge der zum Zeitpunkt $t - 1$ verfügbaren Informationen. Die bedingte Varianz σ_t^2 ist eine deterministische Funktion der zeitverzögerten Kursänderungen. Die Varianz σ_t^2 ist konditional bedingt auf die Kenntnis der vergangenen Kursbeobachtungen.

3.1.1 Theorie und Definition des ARCH-Modells

In dem von Engle⁴² vorgestellten ARCH(q)-Modell ist die bedingte Varianz σ_t^2 eine lineare Funktion von q zeitverzögerten quadrierten Residuen:

⁴¹Vgl. Engle, Robert F., Heteroscedasticity, 1982, S. 987-1007.

⁴²Vgl. Engle, Robert F., Heteroscedasticity, 1982, S. 987-1007.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2. \quad (3.5)$$

Um eine positive bedingte Varianz σ_t^2 sicherzustellen, müssen die aus den Daten zu schätzenden Parameter a die Nichtnegativitätsbedingungen $a_0 > 0$ und $a_i > 0$ für $i = 1, \dots, q$ erfüllen. Betragsmäßig große vergangene Werte für $\varepsilon_{t-1}, i = 1, \dots, q$, ziehen somit eine hohe bedingte Varianz zum Zeitpunkt t nach sich. Durch diese Eigenschaft ist es möglich, das oben erläuterte Volatilitäts-Clustering nachzubilden.⁴³

Formal erinnert die Gleichung 3.5 zunächst an einen Moving-Average Prozeß für die bedingte Varianz.⁴⁴ Da jedoch die bedingte Varianz oft nicht beobachtbar ist, definiert man $\varpi = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$.⁴⁵ Gleichung 3.5 läßt sich dann wie folgt formulieren

$$\epsilon_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \varpi, \quad (3.6)$$

wobei $E(\varpi) = 0$ und $cov(\varpi_t, \varpi_s) = 0$ für $t \neq s$ gilt. Man erkennt, dass die Gleichung 3.5 die Darstellung eines AR-Prozesses für ϵ_t^2 ist. Ein ARCH(q)-Prozeß muss analog zu einem linearen AR(q)-Prozess die Stationaritätsbedingung erfüllen, da ansonsten die bedingte Varianz „explodiert“. Dabei ist der zugrundeliegende stochastische Prozess stationär, wenn die Summe der Modellparameter ohne Konstante kleiner eins ist⁴⁶:

$$\sum_{i=1}^q a_i < 1. \quad (3.7)$$

In diesem Fall beinhalten stationäre ARCH-Prozesse auch eine endliche unbedingte Varianz. Diese ergibt sich als Erwartungswert der bedingten Varianzen. Man erhält für die unbedingte Varianz von $\bar{\sigma}^2$ durch wiederholtes Einsetzen und

⁴³Vgl. Bärlocher von Künsnacht, J., 1992, GARCH-Prozesse, S. 33.

⁴⁴Auch Engle hat daher zunächst überlegt, statt ARCH die Bezeichnung MACH (Moving Average Conditional Heteroskedasticity) zu wählen (vgl. Engle, 2004, S. xii).

⁴⁵Vgl. Schmitt, C., 2002, Stochastische Volatilität, S. 315.

⁴⁶Der Beweis der Stationaritätsbedingung (4.7) wird von Engle (1982) geführt. Vgl. Engle, R., Autoregressive, 1982, S. 1004f.

Anwendung des Gesetzes des iterierten Erwartungswertes:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^q a_i}. \quad (3.8)$$

Anhand eines einfachen ARCH(1)-Modells kann die Funktionsweise von ARCH(q)-Modellen unter Verwendung von Gleichung 3.8 auf einfache Weise belegt werden. Für die Ordnung $p = 1$ gilt für die bedingte Varianz σ_t^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 = \frac{a_0}{1 - a_1} + a_1 \left(\varepsilon_{t-1}^2 - \frac{a_0}{1 - a_1} \right) \\ &= \bar{\sigma}^2 + a_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \bar{\sigma}^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die bedingte Varianz ist demnach genau dann größer bzw. kleiner als die unbedingte Varianz, wenn das Quadrat der letzten Beobachtungen größer bzw. kleiner als die unbedingte Varianz ist. Die bedingte Varianz schwankt also um die unbedingte Varianz. Die Beziehung (3.9) zeigt, dass das ARCH-Modell eine adäquate Modellierung von Volatilitätsclustern gewährleistet, da nach einer betragsmäßig großen unerwarteten Kursänderung eine hohe Volatilität und nach einer betragsmäßig kleinen Abweichung eine geringe Volatilität erwartet wird.

Eine Maßzahl zur Charakterisierung der Form einer Verteilung ist die Kurtosis und wird durch das vierte Moment der Verteilung beschrieben. Die Existenz der vierten Momente ist zur Bestimmung der Kurtosis eines ARCH-Modells erforderlich. Im ARCH(1)-Modell ist die Bedingung

$$3a_1^2 < 1 \quad (3.10)$$

für die Existenz dieser Momente unabdingbar.⁴⁷ Für die Kurtosis eines ARCH(1)-Modells⁴⁸ gilt dann

$$Kurt(\varepsilon) = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = 3 \frac{1 - a_1^2}{1 - 3a_1^2} > 3. \quad (3.11)$$

⁴⁷Vgl. Engle, R., Autoregressive, 1982, S. 992.

⁴⁸Eine Verallgemeinerung für ARCH(q)-Modelle ist in Milhøj (1985) zu finden.

An der Gleichung 3.11 erkennt man eine leptokurtische Verteilung der Renditen. Der Wert drei entspricht der Kurtosis der Normalverteilung, und bei Existenz des vierten Moments (Gleichung 3.10) ist der Quotient immer größer eins. Die unbedingten, ungeraden Momente eines ARCH-Prozesses sind gleich null. Auch für ARCH-Prozesse höhere Ordnung kann gezeigt werden, dass die unbedingte Verteilung leptokurtisch ist. Dieses wichtige Argument rechtfertigt die Beschreibung von finanzwirtschaftlichen Zeitreihen mittels ARCH-Modellen. Einschränkend sei hinzugefügt, dass aber nicht nur ARCH(q)-Prozesse diese Eigenschaft aufweisen.⁴⁹

Engle⁵⁰ entwickelte parallel zum ARCH(q)-Modell den ARCH Lagrange-Multiplikatoren (LM) Test, mit welchem die Existenz von eventuellen ARCH-Effekten getestet werden kann. Daher basiert der Test auf einer Regression der ϵ_t^2 gegen eine Konstante und die und die verzögerten Werte $\epsilon_{t-1}^2, \dots, \epsilon_{t-p}^2$. Für die Nullhypothese

$$H_0 : \text{Es liegt kein ARCH-Prozeß vor}$$

kann das Bestimmtheitsmaß dieser Regression R^2 zur Bildung der Teststatistik $TR^2 \sim \chi_p^2$ verwendet werden. Die Prüfgröße TR^2 ist asymptotisch äquivalent zu

$$T \cdot \sum_{k=1}^q \rho^2(k). \quad (3.12)$$

Hierbei bezeichnet $\rho(k)$ den Autokorrelationskoeffizienten des quadrierten Kursausschlages ϵ_t^2 zum Lag k , der durch

$$\rho(k) = \frac{\sum_{i=1}^{T-k} (\epsilon_i^2 - \hat{\mu})(\epsilon_{i+k}^2 - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^{T-k} (\epsilon_i^2 - \hat{\mu})^2} \quad (3.13)$$

mit

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \epsilon_i^2 \quad (3.14)$$

bestimmt wird.

⁴⁹Vgl. Geyer, A., Information, 1992, S. 190.

⁵⁰Vgl. Engle, R., Autoregressive, 1982, S. 999f.

Mit dem Ljung-Box Test

$$LB_n = T(T+2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{T-i} \rho^2(k), \quad (3.15)$$

kann die Unkorreliertheit von ϵ_t^2 unter Berücksichtigung mehrerer Lags überprüft werden. T ist die Anzahl der Beobachtungen, $\rho(k)$ ist der Autokorrelationskoeffizient von ϵ_t^2 zum Lag i . Unter der Nullhypothese fehlender Autokorrelation ist die Teststatistik des Ljung-Box Tests asymptotisch χ^2 -verteilt mit n Freiheitsgraden.

Unter der Annahme einer bedingten Normalverteilung kann ein ARCH(q)-Modell mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.⁵¹ Da die Varianzgleichung nichtlinear ist, erfolgt die Schätzung durch ein iteratives Verfahren. Die gemeinsame Dichtefunktion ist das Produkt aller bedingten Dichtefunktionen und daher ist die Log-Likelihood Funktion die Summe der bedingten normalverteilten, zum ARCH(q)-Modell korrespondierenden log-Likelihood Funktionen. Demzufolge hat die Log-Likelihood Funktion folgende Form

$$\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln \sigma_t^2 + \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (3.16)$$

mit $\theta = (a_0, \dots, a_q)$. Ziel des Maximum-Likelihood-Ansatzes ist die Maximierung von Gleichung 3.16 in Abhängigkeit des Parametervektors θ . Die erste Ableitung der Likelihood-Funktion nach den Elementen des Parametervektors θ lautet:

$$\frac{\partial l_t}{\partial a_i} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_i} \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \quad (3.17)$$

mit den Ableitungen $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_i}$, die sich berechnen als

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_i} = \epsilon_{t-1}^2 \text{ für } 1, \dots, q \text{ und } \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_0} = 1. \quad (3.18)$$

⁵¹Engle (1982) zeigt die Vorteile der ML-Schätzung gegenüber der Kleinst-Quadrate-Schätzung. Vgl. Engle, R., Autoregressive, 1982, S. 999f.

Die Elemente der Hesse-Matrix ergeben sich damit zu

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial a_i \partial a_j} = -\frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_i} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_j} \frac{\sigma_t^2}{\epsilon_t^2} + \left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_j} \right). \quad (3.19)$$

Aus der Inversen der Hesse-Matrix können dann die Standardfehler des geschätzten Parametervektors θ ermittelt werden. In zahlreichen empirischen Untersuchungen⁵² hat sich der von Brendt, Hall, Hall und Hausman entwickelte BHHH-Algorithmus⁵³ als besonders geeignet zur Maximierung der Log-Likelihood Funktion (Gleichung 3.16) erwiesen.⁵⁴

3.1.2 Test auf nichtlineare Muster

Um das Vorliegen nichtlinearer Muster zu überprüfen, werden Testverfahren verwendet. Im vorigen Kapitel wurde der Ljung-Box-Test auf das in dieser Arbeit verwendete Datenmaterial angewendet. Dabei konnte festgestellt werden, dass bei den hier untersuchten, quadrierten Renditen eine Abhängigkeit in den bedingten Varianzen vorliegt.

Eine weitere Möglichkeit, das Auftreten nichtlineare Muster, in Form von Volatilitäts-Clustern, nachzuweisen, bildet der von Engle entwickelte LM-Test.⁵⁵ Unter der Nullhypothese fehlender ARCH-Effekte läßt sich zeigen, dass auch diese Teststatistik asymptotisch χ^2 -verteilt ist mit q Freiheitsgraden. Im folgenden wird der LM-Test für das in dieser Arbeit verwendete Datenmaterial durchgeführt.

Die Ergebnisse des LM-Tests für unterschiedliche Lagordnungen q für die hier untersuchten Renditereihen sind in der Tabelle 3.4 zusammengefasst. Bei den sechs betrachteten Renditereihen treten somit für alle untersuchten Lagordnungen hochsignifikante ARCH-Effekte auf. Folglich kann die Nullhypothese, fehlender ARCH-Effekt, verworfen werden, so dass von einer starken zeitlichen Abhängigkeit in den

⁵²Vgl. Bera, A. K., Higgins, M. L., ARCH models, 1993, S. 349.

⁵³Vgl. Berndt, E. K.; Hall, B. H.; Hall, R. E.; Hausmann, J., Estimation and Inference, 1974, S. 656ff.

⁵⁴Wie gezeigt werden kann, sind die durch Maximierung von Gleichung 3.16 gewonnenen Schätzer unter Regularitätsbedingungen konsistent, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt vgl. Franke, J.; Härdle, W.; Hafner, C., Einführung, 2001, S. 224f.

⁵⁵Vgl. hierzu Abschnitt 3.1.1.

<i>Reihe</i> \ <i>q</i>	10	15	20	25	30
<i>Dax</i>	34.07***	41.02***	109.48***	113.14***	146.50***
<i>Eon</i>	34.49***	41.29***	44.95***	46.42***	51.73***
<i>E – Stoxx</i>	40.05***	45.64***	97.17***	101.70***	132.32***
<i>EADS</i>	29.98***	34.71***	56.48***	62.10***	76.92***
<i>Eur/US\$</i>	52.31***	54.28***	90.30***	90.96***	128.03***
<i>Brent</i>	20.04**	25.32**	33.95***	46.97***	54.33***

Signifikanzniveau : * = 0,10 ** = 0,05 *** = 0,01.

Tabelle 3.1: LM-Test auf ARCH-Effekte

bedingten Varianzen ausgegangen werden kann.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten sechs stündlichen Renditereihen nicht normalverteilt sind, sondern dass sie eine leptokurtische Verteilung haben. Ferner wurde festgestellt, dass die untersuchten Renditereihen eindeutig durch Heteroskedastizität und Volatilitäts-Cluster gekennzeichnet sind.

3.1.3 Schätzung und empirische Ergebnisse des ARCH-Modells

Nachdem für die ausgewählten Renditereihen in den vorhergehenden Abschnitten deutliche ARCH-Effekte festgestellt werden konnten, ist nun die Modellierung dieser empirischen Auffälligkeiten Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Es ist jedoch äußerst schwierig, die Ordnung q geeignet zu wählen.⁵⁶ Gemäß Bera/Higgins wurde in zahlreichen empirischen Studien gezeigt, dass sich für Finanzmarktdaten ein sparsames Modell bewährt hat.⁵⁷ Daher soll auch die empirische Analyse im Rahmen dieser Arbeit auf diese sparsame Spezifikation zurückgreifen. In der Tabelle 3.2 sind die Parameter der ARCH(1)-Schätzungen für die hier untersuchten sechs Renditezeitreihen mit den jeweiligen t-Statistiken in den Klammern angegeben. Für die Beschreibung der Renditen wurde folgende Gleichung gewählt:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t. \quad (3.20)$$

⁵⁶Vgl. Bönke, G., Analyse, 1997, S. 127.

⁵⁷Vgl. Bera, A. ; Higgins, M. L., ARCH, 1993, S. 317-321.

Die Varianzgleichung des geschätzten ARCH(1)–Modells lautet:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (3.21)$$

Die geschätzten Parameterwerte sind in allen Fällen statistisch signifikant von null verschieden und bestätigen somit das Vorliegen der ARCH-Effekte, in den hier untersuchten Renditezeitreihen. Bis auf die Renditereihe des Dax-Indexes und des Brent-Rohölpreises sind die Modellschätzungen nur eingeschränkt verwendbar, da der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 für die Schätzungen als hochsignifikant negativ ausgewiesen wird. Negative Schätzwerte sind jedoch laut Annahmen der ARCH-Modelle nicht zugelassen.⁵⁸

<i>ARCH</i> (1)	a_0	a_1
<i>Dax</i>	0.1579 (33.1652)	0.08435 (3.6902)
<i>Eon</i>	0.302212 (36.95001)	−0.030151 (−5.562744)
<i>E – Stox</i>	0.217113 (47.79041)	−0.013341 (−1.867496)
<i>EADS</i>	0.302501 (36.90280)	−0.030183 (−5.454137)
<i>Eur/US\$</i>	0.035555 (53.48143)	−0.020865 (−4.455510)
<i>Brent</i>	0.361315 (27.49289)	0.101329 (4.165647)

Tabelle 3.2: Ergebnisse der ARCH(1)-Schätzung

3.1.4 Beurteilung des ARCH-Modells

Im folgenden soll die empirische Haltbarkeit des ARCH(1)-Modells anhand der geschätzten Residuen überprüft werden. Ist die ARCH-Modellschätzung korrekt spezifiziert, sollten die optimalen Residuen zum einen vollständig unkorreliert und zum anderen bedingt normalverteilt sein. Die Ergebnisse für eine Modellüberprüfung auf Basis der hier untersuchten empirischen Daten sind in der Tabelle 3.2

⁵⁸Vgl. hierzu die Nebenbedingungen aus Gleichung 3.5.

aufgelistet. Die Analyse der standardisierten Residuen zeigt eine gute Übereinstimmung für den Mittelwert null und die Varianz eins. Dennoch sind die normierten Residuen bei weitem nicht normalverteilt, da die Werte für die Schiefe keineswegs null sind und die Werte für die Kurtosis eindeutig den Wert einer Normalverteilung von drei übersteigen. Die Jarque-Bera-Test-Statistik der standardisierten Residuen nimmt für alle Renditereihen weiterhin sehr große Werte an, so dass die Nullhypothese einer Normalverteilung weiterhin hochsignifikant abzulehnen ist. Zusätzlich muss die zweite Residueneigenschaft, dass keine signifikanten Autokorrelationen ermittelt werden können, überprüft werden. Anhand der Ljung-Box-Teststatistik ist deutlich zu erkennen, dass für alle ARCH-Modellschätzungen, bis auf die DAX-Rendite, weiterhin Korrelationen in den quadrierten standardisierten Residuen bestehen. Dies führt zu einer hochsignifikanten Ablehnung der Nullhypothese unkorrelierter quadrierter Residuen.

<i>ARCH</i>	<i>DAX</i>	<i>EON</i>	<i>E-Stoxx</i>	<i>EADS</i>	<i>EUR/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M</i>	-0.0128	-0.0041	-0.0018	0.0027	0.0093	-0.0002
<i>St.Abw.</i>	1.0003	1.0009	1.0004	1.0004	1.0031	1.0004
<i>Schiefe</i>	0.2776	-0.2333	-0.4691	0.3811	-0.3348	0.0239
<i>Kurtosis</i>	7.1284	5.8949	9.4938	8.0687	11.083	5.1176
<i>J - B</i>	838.0145*	412.36*	2064.631*	1260.015*	3157.688*	215.181*
<i>SIC</i>	1.0859	1.625	1.3144	2.9856	-0.5017	1.9292
<i>Q(10)</i>	14.439	33.412*	43.707*	25.779*	54.286*	20.165**

Signifikanzniveau : * = 0,01 ** = 0,05.

Tabelle 3.3: Beurteilung der ARCH(1)-Schätzung

Man kann daher zusammenfassen, dass es ARCH-Effekte in den untersuchten Renditezeitreihen gibt. Allerdings liefert die ARCH(1)-Spezifikation keine befriedigenden Schätzergebnisse für die zugrundeliegenden Daten. Eine Ausnahme sind die Schätzungen für die DAX-Renditereihe.

3.2 GARCH-Modell

3.2.1 Theorie und Definition des GARCH-Modells

In vielen empirischen Anwendungen von ARCH-Modellen auf finanzwirtschaftliche Zeitreihen hat man immer wieder festgestellt, dass zur Erzielung adäquater Ergeb-

nisse eine relativ hohe Ordnung p notwendig war, um die Volatilität abzubilden. Ein Problem für die Schätzung von ARCH-Modellen mit hohen Ordnungen p ist das Einhalten der Nichtnegativitätsrestriktion für die Parameter der Varianzgleichung. Um dem von Box und Jenkins postulierten Prinzip der Sparsamkeit bei der Modellbildung gerecht zu werden, entwickelte Bollerslev eine Verallgemeinerung der ARCH-Modelle, die sogenannten Generalized ARCH (GARCH)-Modelle.⁵⁹

Dieses Modell unterscheidet sich vom ARCH-Modell dadurch, dass die bedingte Varianz der Residuen neben den verzögerten quadrierten Residuen auch von der bedingten Varianz der Vorperioden abhängt. Bollerslev modelliert die bedingte Varianz eines GARCH(p,q)-Modells wie folgt:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (3.22)$$

Die Nichtnegativitätsrestriktionen $a_0 > 0, a_i > 0$ für $i = 1, \dots, q$ und $\beta_j > 0$ für $j = 1, \dots, p$ garantieren wiederum, dass die bedingte Varianz strikt positiv wird. Mit Hilfe von Lag- und Polynom-Operatoren kann Gleichung 3.22 auch wie folgt formuliert werden

$$\sigma_t^2 = a_0 + a(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (3.23)$$

mit $\beta(L) = \beta_1 L + \dots \beta_p L^p$ und $a(L) = a_1 L + \dots a_q L^q$.

Für $p = 0$ reduziert sich der Prozeß auf einen ARCH(q)-Prozess und für $q = p = 0$ ergibt sich ein einfacher White-Noise-Prozess.

Definiert man wie auch schon beim ARCH-Modell $\varpi = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, kann Gleichung 3.22 zu einem ARMA(m,q)-Modell für ε_t^2 umgeformt werden. Dann ergibt sich für den GARCH(p,q)-Prozess der folgende Zusammenhang:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_i + \beta_j) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \varpi_{t-j} + \varpi_t, \quad (3.24)$$

mit $m = \max(p, q)$, $a_i = 0$ falls $i > q$ und $\beta_j = 0$ falls $j > p$. Diese Gleichung stellt einen ARMA(m,q)-Prozess der quadrierten Residuen eines GARCH(p,q)-Modells

⁵⁹Bollerslev, T., Generalized, 1986, S. 307-327.

dar.⁶⁰ Die Existenz eines solchen Prozesses setzt ebenfalls Stationarität voraus.

Gemäß dem Theorem 1 von Bollerslev⁶¹ ist ein GARCH-Prozess genau dann schwach stationär, wenn die Parameterrestriktion

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (3.25)$$

gilt. Die unbedingte Varianz $\bar{\sigma}^2$ eines stationären GARCH-Prozesses beträgt dann

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^q a_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}. \quad (3.26)$$

Analog zur ARMA-Darstellung von MA(∞)-Modellen, lassen sich GARCH(p,q)-Modelle in ein äquivalentes ARCH(∞)-Modell umformen. Mittels dieser Umformung erhält man weitere Einblicke in die Struktur und Parameterrestriktionen von GARCH(p,q)-Modellen. Durch rekursives Ersetzen von σ_{t-1}^2 ergibt sich für einen GARCH(1,1)-Modell

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (a_0 + a_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) \\ &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 a_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 (\sigma_{t-1}^2 + a_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t-3}^2) \\ &= \dots = \frac{a_0}{1 - \beta_1} + a_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ein GARCH(1,1) -Prozess entspricht einem ARCH(∞)-Prozess mit geometrisch fallenden Gewichten in der Varianzfunktion. Für den allgemeinen GARCH (p,q) - Prozess erhält man

$$\sigma_t^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i} + a_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (3.28)$$

⁶⁰Durch das p werden die Ordnungen des MA-Teils beschrieben. Vgl. Gouriou, C., ARCH Models, 1997, S. 35.

⁶¹Vgl. Bollerslev, T., Generalized, 1986, S. 310.

wobei die λ_i eine Funktion der a_i und β_i sind.⁶²

Die Existenz der vierten Momente ist zur Bestimmung der Kurtosis eines GARCH-Modells erforderlich. Im GARCH(1,1)-Modell ist die Bedingung:

$$3a_1^2 + 2a_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1 \quad (3.29)$$

für die Existenz dieser Momente unabdingbar.⁶³ Daraus ergibt sich für die Kurtosis eines GARCH(1,1)-Modells bei Existenz des vierten Moments

$$Kurt(\varepsilon) = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = \frac{6a_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2a_1\beta_1 - 3a_1^2}. \quad (4.28)$$

Die Kurtosis des Prozesses ist im Falle eines stationären Prozesses größer drei, woraus ein leptokurtisches Verhalten, analog zum ARCH(1)-Modell, folgt.

Die Schätzung eines GARCH(p,q)-Prozesses erfolgt nach der Maximum-Likelihood-Methode, wobei die Vorgehensweise analog zur Schätzung eines ARCH(q)-Modells ist. Demzufolge hat die Log-Likelihood Funktion folgende Form

$$\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln \sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (3.30)$$

mit $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$. Bei der Ableitung nach den Parametern θ ergibt sich dieselbe Form wie im ARCH(q)-Modell und man erhält für die Elemente der Hesse-Matrix

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial a_i \partial a_j} = -\frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_i} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_j} \frac{\sigma_t^2}{\varepsilon_t^2} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial a_j} \right). \quad (3.31)$$

Aus der Inversen der Hesse-Matrix können dann die Standardfehler des geschätzten Parametervektors θ ermittelt werden. Der einzige Unterschied zu der Gleichung von Engle (3.19) besteht in der Einbeziehung des rekursiven Teils des GARCH(p,q)-Modells, die eine zusätzliche Komplexität in das Optimierungsproblem einbringen. Aus diesem Grund und der Nichtlinearität der Log-likelihood-Funktion wird in der

⁶²Vgl. Bera, A. K.; Higgins, M. L., ARCH models, 1993, S. 313.

⁶³Vgl. Bollerslev, T., Generalized, 1986, S. 312.

Literatur häufig der BHHH-Algorithmus verwendet.⁶⁴

3.2.2 Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-Modells

Im vorigen Abschnitt lieferte das ARCH(1)-Modell keine befriedigenden Ergebnisse. Es soll nun im folgenden ein GARCH(q, p)-Modell geschätzt werden. Gemäß Bera/Higgins wurde in zahlreichen empirischen Studien gezeigt, dass sich für Finanzmarktdaten ein sparsames GARCH(1,1)-Modell bewährt hat.⁶⁵ Die Varianzgleichung lautet dann für die Renditen:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (3.32)$$

Tabelle 3.4 enthält die geschätzten Parameter dieses Modells für alle Renditezeitreihen auf Basis der hier verwendeten Finanzmarktdaten.

GARCH	a_0	a_1	β_1	$a_1 + \beta_1$
<i>Dax</i>	0.0007 (2.2208)	0.0201 (5.5077)	0.9752 (203.3047)	0.99534
<i>Eon</i>	0.1243 (3.0256)	-0.031 (-6.7214)	0.6065 (4.3482)	0.57552
<i>E - Stoxx</i>	0.001 (2.2915)	0.0206 (5.7934)	0.9743 (187.3297)	0.99502
<i>EADS</i>	0.0211 (4.4076)	0.0251 (6.3489)	0.9572 (144.9777)	0.98235
<i>Eur/US\$</i>	0.0114 (2.3257)	-0.0227 (-2.762)	0.7177 (5.7159)	0.69499
<i>Brent</i>	0.0095 (2.4372)	0.0189 (3.5721)	0.9574 (71.7414)	0.97644

Tabelle 3.4: Ergebnisse der GARCH(1,1)-Schätzung

Bei den sechs untersuchten Zeitreihen konnten hoch signifikante GARCH-(1, 1)-Modelle geschätzt werden, so dass die Eigenschaften der Finanzmarktdaten opti-

⁶⁴Vgl. Bollerslev, T., Generalized, 1986, S. 316f.

⁶⁵Vgl. Bera, A.; Higgins, M. L., ARCH, 1993, S. 317-321.

mal abgebildet werden. Leider erfüllen nur vier Modellschätzungen die Stationaritätsbedingungen. Der Wechselkurs und die EON-Aktie sind nur eingeschränkt verwendbar, da der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 für beide Schätzungen als hochsignifikant negativ ausgewiesen wird. Negative Schätzwerte verletzen jedoch die Nichtnegativitätsbedingung der GARCH-Modelle.⁶⁶ Anhand der Schätzergebnisse ist nun erkennbar, dass für alle Renditezeitreihen der GARCH-Parameter β_1 bedeutend größer als der ARCH-Parameter a_1 ist. a_1 ist dabei für das Ausmaß der unmittelbaren Reaktion auf neue Nachrichten ε_t verantwortlich, während β_1 die Dauer des Abklingens der Wirkung beschreibt. Da der Parameter β_1 deutlich größer als a_1 ist, kehrt die bedingte Varianz σ_t^2 nach großen Schocks ε_t typischerweise langsam auf das Gleichgewichtsniveau zurück. Aus Tabelle 3.4 ist zu erkennen, dass die Zeitreihen stationär sind, da die Summe aus a_1 und β_1 in allen Fällen knapp unter eins liegt. Dadurch besteht eine hohe Persistenz vergangener Schocks in der bedingten Varianz, d. h. dass die Volatilität der Renditen langsam zu ihrem Gleichgewicht zurückkehrt.

3.2.3 Beurteilung des GARCH-Modells

Zur Beurteilung der Güte des GARCH(1,1)-Modell für die dargestellten Schätzergebnisse werden die bereits beschriebenen Spezifikationstests geprüft. Die in Tabelle 3.5 ausgewiesenen statistischen Eigenschaften der standardisierten Residuen machen deutlich, dass es durch die Verwendung eines GARCH(1,1)-Modells gelungen ist, die Abweichungen für fünf Renditezeitreihen von der Normalverteilung zu reduzieren. Dabei besitzen alle Residuen, bis auf die Schätzparameter des Wechselkurses, einen Mittelwert von null und eine Varianz von eins. Die Werte für die Kurtosis sind bei fast allen Renditereihen deutlich niedriger als bei den Schätzergebnissen eines ARCH(1)-Modells. Allerdings zeigt sich anhand der Jarque-Bera-Test-Statistik, dass für alle standardisierten Residuen immer noch Abweichungen von der Normalverteilung bestehen, da die Nullhypothese einer Normalverteilung höchst signifikant abgelehnt wird. Demnach ist es dem GARCH(1,1)-Modell nicht vollständig gelungen, die Leptokurtosis zu beseitigen. Desweiteren müssen noch die quadrierten Residuen untersucht werden, da anhand dieser festgestellt werden

⁶⁶Vgl. hierzu die Nichtnegativitätsrestriktionen aus Gleichung 3.22.

kann, ob das geschätzte GARCH(1,1)-Modell die Abhängigkeiten zwischen den bedingten Varianzen erklären kann. Die quadrierten Residuen des DAX-Indexes, der EADS-Aktie und der Brent-Rohölpreis weisen keine signifikanten Autokorrelationen mehr auf. Das hier geschätzte GARCH(1,1)-Modell liefert eine gute Anpassung für diese Finanzmarktdaten. Allerdings kann dieses Ergebnis für die anderen drei Renditereihen nicht durch die Ljung-Box-Teststatistik bestätigt werden, da hier die Nullhypothese unkorrelierter quadrierter Residuen hochsignifikant verworfen wird.

<i>GARCH</i>	<i>DAX</i>	<i>EON</i>	<i>E-Stoxx</i>	<i>EADS</i>	<i>EUR/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M</i>	-0.0095	-0.0002	-0.0005	-0.0006	0.0228	0.0088
<i>St.Abw.</i>	1.0005	1.0006	1.0005	1.0032	0.9634	1.0012
<i>Schiefe</i>	0.0592	-0.243	-0.5878	0.3948	-0.365	0.0219
<i>Kurtosis</i>	5.3565	5.8555	6.5405	7.7169	10.9655	5.1680
<i>J - B</i>	266.9956*	402.4431*	667.4679*	1096.963*	3071.430*	225.5278*
<i>SIC</i>	1.0303	1.6283	1.2500	2.9743	-0.4967	1.9260
<i>Q(10)</i>	10.044	33.941*	38.181*	15.822	55.522*	12.942

Signifikanzniveau : * = 0,01.

Tabelle 3.5: Beurteilung der GARCH(1,1)-Schätzung

Aus diesen Ergebnissen wird deutlich, dass für die Modellierung von Volatilitätsclustern das GARCH(1,1)-Modell besser geeignet ist als das ARCH(1,1)-Modell.

In den folgenden Abschnitten dieser Arbeit werden ausgewählte Modifikationen von Modellen der ARCH-Familie vorgestellt und in die empirische Analyse des hier zu untersuchenden Datenmaterials einbezogen.

3.3 GARCH-M-Modell

3.3.1 Theorie und Definition des GARCH-M-Modells

In der Finanzierungstheorie nimmt die Beziehung zwischen Rendite und Risiko eine zentrale Rolle ein. Viele theoretische Modelle, die diesen Trade-Off beschreiben, implizieren eine lineare Beziehung zwischen diesen beiden Größen. So zum Beispiel das CAPM: die erwartete Rendite einer Aktie ist linear abhängig von der

erwarteten Rendite des Marktportfolios und dem Verhältnis der Kovarianz zur Varianz.⁶⁷ Ist das Risiko, gemessen als Varianz, nicht über die Zeit konstant, so ist der bedingte Erwartungswert der Marktrendite eine lineare Funktion der bedingten Varianz. Um derartige Zusammenhänge abbilden zu können, haben Engle, Lilien und Robbins das (G)ARCH in Mean (GARCH-M)-Modell entwickelt.⁶⁸ Sie erweitern den (G)ARCH-Ansatz, indem die bedingte Standardabweichung oder die Varianz als exogener Einflußfaktor in die Bestimmungsgleichung der Rendite hinzugefügt wird.

Die Renditegleichung im GARCH-M-Modell ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \lambda \cdot g(\sigma_t^2) + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei μ und λ konstant sind. Für die Beziehung zwischen dem Koeffizienten λ und der bedingten Varianz σ_t^2 sind verschiedene funktionale Zusammenhänge vorgeschlagen worden. Überlicherweise werden lineare oder logarithmische Funktionen von σ_t oder σ_t^2 verwendet, d.h.

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2, \sigma_t \text{ oder } \ln(\sigma_t^2). \quad (3.34)$$

Dem CAPM folgend wird die lineare Funktion $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$ verwendet. Jedoch wird in den meisten empirischen Untersuchungen die Darstellung in der Wurzel Form den anderen Spezifikationen vorgezogen.⁶⁹ λ kann hierbei als ein über alle Marktteilnehmer hinweg aggregiertes Maß der individuellen Risikoaversion, und der Term $\lambda \cdot g(\sigma_t^2)$ als zeitvariable Risikoprämie des betrachteten Titels interpretiert werden. Je größer der Wert für λ geschätzt wird, desto höher ist die Risikoaversion und damit auch die Risikoprämie, die von einem Investor als Ausgleich für das Halten einer risikobehafteten Investition verlangt wird.

⁶⁷Vgl. Abschnitt 4.1.1.3.

⁶⁸Vgl. Engle, R. F., Lilien, D. M.; Robins, R. P., ARCH-M Model, 1987, S. 391-407.

⁶⁹Vgl. Bera, A. K.; Higgins, M. L., ARCH models, 1993, S. 348.

3.3.2 Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-M-Modells

Es konnte für die hier untersuchten Renditereihen gezeigt werden, dass das GARCH(1,1)-Modell für die Renditen die besser geeignete Spezifikation ist als das ARCH(1)-Modell. Aus diesem Grund wird für die Beziehung zwischen erwartetem Ertrag und Risiko ein GARCH-Modell für die Schätzung verwendet.

Die Renditegleichung für ein GARCH-M(1,1)-Modell ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \lambda \cdot g(\sigma_t^2) + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die Ergebnisse der Parameterschätzungen für das hier verwendete Datenmaterial für ein GARCH-M(1,1)-Modell enthält Tabelle 3.6. Es konnten für die untersuch-

GARCH-M	λ	a_0	a_1	β_1
<i>Dax</i>	0.20187 (1.31304)	0.00076 (2.16858)	0.02023 (5.45427)	0.9751 (198.3936)
<i>Eon</i>	0.77878 (0.96704)	0.15208 (1.97599)	-0.03203 (1.97599)	0.56316 (2.40273)
<i>E - Stoxx</i>	0.35209 (2.29356)	0.00104 (2.19042)	0.02116 (5.67861)	0.97392 (181.4399)
<i>EADS</i>	0.10579 (0.48955)	0.02103 (4.40302)	0.02536 (6.41547)	0.95711 (147.2049)
<i>Eur/US\$</i>	-1.0788 (-0.81737)	0.01277 (3.32714)	-0.02884 (-2.73909)	0.75962 (10.3964)
<i>Brent</i>	-0.10434 (-0.44525)	0.00941 (2.41633)	0.01889 (3.57302)	0.9579 (72.23381)

Tabelle 3.6: Ergebnisse der GARCH-M-(1,1)-Schätzung

ten Renditereihen hoch signifikante GARCH-Modellierungen geschätzt werden, so dass dieser Modelltyp eine angemessene Spezifikation darstellt. Allerdings ist das GARCH-M(1,1)-Modell für den Wechselkurs und die EON-Aktie nur eingeschränkt verwendbar, da der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 für beide Schätzungen als hochsignifikant negativ ausgewiesen wird. Negative Schätzwerte sind jedoch laut Annahmen der ARCH- und GARCH-Modelle nicht zugelassen.⁷⁰ Die anderen vier

⁷⁰Vgl. hierzu die Nebenbedingungen aus Gleichung 3.5 bzw 3.22.

Modellschätzungen erfüllen die Stationaritätsbedingungen. Anhand der Schätzergebnisse ist wie erwartet zu erkennen, dass für alle Renditezeitreihen der GARCH-Parameter β_1 bedeutend größer als der ARCH-Parameter a_1 ist. Auch hier wird deutlich, dass eine hohe Persistenz vergangener Schocks in der bedingten Varianz besteht. Ein Vergleich mit dem GARCH(1,1)-Modell in Tabelle 3.4 zeigt, dass sowohl die Parameter als auch die Teststatistiken sich sehr ähnlich sind. Durch die Aufnahme des GARCH-in-Mean-Terms sind keine großen Auswirkungen auf die Parameterschätzungen der Varianzgleichung ausgeübt worden. Bemerkenswert ist jedoch, dass der Zusammenhang zwischen Mittelwert und Varianz für alle untersuchten Zeitreihen sehr schwach ist. Die Schätzwerte für den Marktpreis des Risikos λ zeigen, dass bis auf die E-Stoxx-Reihe keiner dieser Koeffizienten signifikant ist und somit kaum GARCH-in-Mean-Effekte in den untersuchten Zeitreihen nachweisbar sind.

3.3.3 Beurteilung des GARCH-M-Modells

In Tabelle 3.7 sind für das hier verwendete Datenmaterial die Kennzahlen für die Überprüfung der Eigenschaften des GARCH-M-(1,1)-Modells aufgelistet. Dabei ist zu erkennen, dass alle standardisierten Residuen, bis auf die Schätzparameter des Wechselkurses und der EON-Aktie, einen Mittelwert von null und eine Varianz von eins besitzen.

Auffallend ist, dass die standardisierten Residuen des Wechselkurses schlechtere Ergebnisse erzielen, als bei einer Schätzung durch ein GARCH(1,1)-Modell. Die Werte der Kurtosis für die Renditereihen entsprechen den Schätzergebnissen eines GARCH(1,1)-Modells. Auch hier zeigt sich anhand der Jarque-Bera-Test-Statistik, dass für alle standardisierten Residuen immer noch Abweichungen von der Normalverteilung bestehen. Demzufolge wird die Annahme einer Normalverteilung hochsignifikant verworfen. Anhand der Ljung-Box-Teststatistik ist zu erkennen, dass die quadrierten Residuen des DAX-Indexes, der EADS-Aktie und der Brent-Rohölpreis keine signifikanten Autokorrelationen mehr aufweisen. Das GARCH-M-(1,1)-Modell hat damit die sich im Zeitablauf ändernde Volatilität gut erfasst und liefert für diese drei Renditereihen eine gute Anpassung an die Daten. Für die anderen drei Renditereihen muss weiterhin die Annahme unkorrelierter

quadrierter Residuen hochsignifikant abgelehnt werden.

<i>GARCH – M</i>	<i>DAX.</i>	<i>EON</i>	<i>E – Stox</i>	<i>EADS</i>	<i>EUR/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M</i>	–0.0169	0.0054	–0.0157	–0.0027	–0.0484	–0.0074
<i>St.Abw.</i>	0.9988	0.9475	0.9953	1.0015	0.8668	1.0011
<i>Schiefe</i>	0.0568	–0.2499	–0.5930	0.3916	–0.6289	0.0214
<i>Kurtosis</i>	5.3382	5.8746	6.5633	7.7013	12.1816	5.1677
<i>J – B</i>	262.8419*	408.2742*	676.4203*	1089.445*	4122.508*	225.9526*
<i>SIC</i>	1.0349	1.6431	1.2514	2.9802	–0.4076	1.9319
<i>Q(10)</i>	10.085	32.638*	37.256*	15.877	70.882*	12.876

Signifikanzniveau : * = 0,01.

Tabelle 3.7: Beurteilung der GARCH-M-(1,1)-Schätzung

3.4 EGARCH-Modell

3.4.1 Theorie und Definition des EGARCH-Modells

Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung von unterschiedlichen Einflüssen positiver und negativer Informationen auf die Ausprägungen der Renditewerte ist das Exponential-GARCH-Modell (EGARCH). Das EGARCH-Modell, das von Nelson entwickelt wurde⁷¹, ermöglicht die Beschreibung von Phänomenen, in denen negative Einflüsse eine stärkere Wirkung auf die bedingte Varianz haben als positive. Man spricht daher auch von einem asymmetrischen GARCH-Modell. Bei dem EGARCH-Modell erfolgt eine logarithmierte Transformation der bedingten Varianz und es ergibt sich somit die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \ln \sigma_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| \right) \right] + \gamma \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 \\
 &= a_0 + \sum_{i=1}^q a_i g(z_{t-1}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 \\
 \text{mit } g(z_t) &= \theta \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| \right) \right] + \gamma \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

⁷¹Vgl. Nelson, D. B., Conditional, 1991, S. 347-370.

Es werden in diesem Modell die standardisierten Fehlerterme $\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}}$ berücksichtigt. Im Falle einer bedingten Normalverteilung für ε_{t-i} sind die $\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}}$ standardnormalverteilt, wobei der Erwartungswert des absoluten, standardisierten Residuums $E \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,798$ entspricht. Die Vorzeichenrestriktionen für a_0, a_1, γ und β_1 entfallen und die Stationaritätsbedingung reduziert sich auf $\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, so dass die durch die Parameterrestriktionen (Nichtnegativitäts- und Stationaritätsbedingung) des GARCH Modells häufig auftretenden Schätzprobleme teilweise umgangen werden können. Die Funktion $g(z_t)$ erlaubt die Berücksichtigung zweier Effekte der standardisierten zufallsbedingten Schocks $\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}}$ auf die bedingte Varianz σ_t^2 . Der Term $\theta \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| \right) \right]$ bestimmt den Größeneffekt, nämlich die betragsmäßige Abweichung des Schocks von seinem Erwartungswert. Je größer der Koeffizient θ ist, um so stärker ist der Einfluß dieser Abweichung auf die bedingte Varianz σ_t^2 .⁷² Hier bestehen Ähnlichkeiten zur Grundidee des GARCH-Modells. Der Term $\gamma \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}}$ bestimmt den Vorzeicheneffekt, ist asymmetrischer Natur und kann so den Leverage-Effekt zum Ausdruck bringen. Wenn $\gamma = 0$ ist, dann beeinflussen positive und negative Schocks (Nachricht) gleicher Größe mit dem selben Effekt die Volatilität. Wenn aber $-1 < \gamma < 0$ gilt, dann wirken negative Schocks stärker auf die Erhöhung der Volatilität als positive Schocks. Ist $\gamma < -1$ ergibt sich eine Reduktion der Volatilität bei einem positivem Schock, während eine negative Information die Volatilität erhöht. Genau entgegengesetzt wirken die Schocks, wenn der Koeffizient γ positiv ist. Üblicherweise erhält man bei empirischen Untersuchungen für θ positive und für γ negative Parameterwerte. Zudem hat man in empirischen Studien festgestellt, dass EGARCH Modelle den Effekt grosser Schocks auf die Volatilität übergewichten.⁷³

3.4.2 Schätzung und empirische Ergebnisse des EGARCH-Modells

Um den asymmetrischen Verlauf der Volatilität in den Renditereihen zu berücksichtigen, soll ein EGARCH(1,1)–Modell an die zugrundeliegende Datenmenge

⁷²Für empirische Anwendungen kann vereinfachend angenommen werden, dass der Koeffizient $\theta = 1$ ist. Vgl. Nelson, D. B., Conditional, 1991, S. 351.

⁷³Vgl. Franke, J.; Härdle, W.; Hafner, C., Einführung, 2001, S. 189.

angepasst werden. Die Varianzgleichung des geschätzten EGARCH(1, 1)–Modells ist wie folgt definiert:

$$\ln \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right) \right] + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2. \quad (3.37)$$

In Tabelle 3.8 sind die Resultate für das hier verwendete Datenmaterial für die Schätzung des EGARCH(1, 1)–Modells dargestellt.

EGARCH	γ	a_0	a_1	β_1
<i>Dax</i>	−0.04426 (−11.8066)	−0.00907 (−1.72115)	0.00482 (0.65398)	0.9971 (1156.022)
<i>Eon</i>	−0.06334 (−2.18175)	−0.48641 (−2.55547)	−0.17132 (−3.26592)	0.50273 (2.97549)
<i>E – Stoxx</i>	0.05891 (1.95968)	−2.22736 (−6.985)	−0.10391 (−2.49481)	−0.48785 (−2.34041)
<i>EADS</i>	−0.02119 (−3.32099)	−0.0514 (−7.70899)	0.07483 (7.82405)	0.98659 (252.5930)
<i>Eur/US\$</i>	0.00439 (0.24364)	−1.37259 (−3.52275)	−0.16238 (−3.55754)	0.55963 (4.54115)
<i>Brent</i>	−0.041 (−1.97444)	−0.36358 (−5.40625)	0.19316 (5.56114)	0.75728 (14.45891)

Tabelle 3.8: Ergebnisse der EGARCH(1,1)-Schätzung

Der vermutete Leverage-Effekt für Finanzmarktdaten wird durch die Schätzergebnisse des EGARCH-Modells weitgehend bestätigt. In den signifikanten negativen Schätzwerten des Parameters γ für die DAX-, Eon-, EADS- und die Brent-Rendite kommt der Leverage-Effekt zum Ausdruck. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass negative Schocks die bedingte Varianz stärker steigern als positive, d.h., dass es somit eine negative Korrelation der bedingten Varianz mit vergangenen Renditen gibt. Für die geschätzte Renditereihe des Wechselkurses ist der Parameter γ allerdings nicht signifikant. Durch die nicht vorhandenen Vorzeichenrestriktionen reduziert sich die Stationaritätsbedingung für dieses Modell auf $\beta_1 < 1$, und wird von allen geschätzten Renditereihen erfüllt. Auch bei dem EGARCH(1, 1)–Modell ist an den Schätzergebnissen zu erkennen, dass für alle Renditezeitreihen, bis auf den E-Stoxx-Index, der GARCH-Parameter β_1 deutlich größer als der ARCH-Parameter a_1 ist. Somit kehrt die bedingte Varianz σ_t^2 nach

großen Schocks ε_t sehr langsam auf das Gleichgewichtsniveau zurück. Allerdings ist der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 für den Dax-Index als nicht signifikant ausgewiesen. Die EGARCH-Modellierung kann dabei die Strukturen (Volatilitätsclusterung, Leptokurtosis, Leverage-Effekt) für die DAX-, Eon-, EADS- und die Brent-Rendite am besten erfassen.

3.4.3 Beurteilung des EGARCH-Modells

Die in Tabelle 3.9 ausgewiesenen statistischen Eigenschaften für das hier verwendete Datenmaterial der geschätzten Renditereihen machen deutlich, dass es durch das EGARCH-Modell gelungen ist, die Abweichungen der Renditeverteilungen von der Normalverteilung zu reduzieren. So liegen alle Mittelwerte annähernd bei Null und ihre Standardabweichungen um eins herum. Die Schiefe ist in den meisten Fällen unverändert, somit haben die untersuchten Renditereihen weiterhin eine links- oder rechtsschiefe Verteilung. Auch die Werte der Kurtosis konnten meist verringert werden, jedoch sind die Werte ausnahmslos größer als drei, dem Wert der Normalverteilung. Durch diese statistischen Kennzahlen sind für die geschätzten Renditen noch immer signifikante Abweichungen von der Normalverteilung zu erkennen. Anhand der Jarque-Bera-Test-Statistik ist zu erkennen, dass die Nullhypothese einer Normalverteilung auch hier höchst signifikant abgelehnt werden muss. Demnach ist es mit dem EGARCH(1,1)-Modell nicht vollständig gelungen, die Leptokurtosis zu beseitigen.

Die quadrierten Residuen müssen noch untersucht werden, da anhand dieser festgestellt werden kann, ob die Abhängigkeiten zwischen den bedingten Varianzen erklärt werden können. Die quadrierten Residuen des DAX-Indexes, der EADS-Aktie und der Brent-Rohölpreis weisen keine signifikanten Autokorrelationen mehr auf. Zu diesem Ergebnis kommt die Ljung-Box-Teststatistik. Somit sind keine ARCH-Effekte in den quadrierten Residuen für diese drei Renditereihen zu finden. Das EGARCH(1,1)-Modell hat damit die sich im Zeitablauf ändernde Volatilität gut erfasst. Dieses Ergebnis kann für die anderen drei Renditereihen nicht bestätigt werden, da hier die Nullhypothese unkorrelierter quadrierter Residuen hochsignifikant verworfen wird. Dies bedeutet für die geschätzten Renditereihen der EON-Aktie, des E-Stoxx-Indexes und des Euro-Dollar-Wechselkurses, dass es

dem EGARCH(1, 1)-Modell nicht gelungen ist, die ARCH-Effekte für diese Rendite-reihen vollständig zu beseitigen.

<i>EGARCH</i>	<i>DAX.</i>	<i>EON</i>	<i>E – Stoxx</i>	<i>EADS</i>	<i>EUR/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M</i>	0.0046	0.0089	−0.0028	0.0067	−0.0009	0.0011
<i>St.Abw.</i>	0.9942	1.0006	1.0008	1.0051	1.0002	0.9999
<i>Schiefe</i>	0.0564	−0.2181	−0.4548	0.3296	−0.3922	0.1047
<i>Kurtosis</i>	5.1793	5.6611	8.9759	7.3029	1.11446	5.1859
<i>J – B</i>	228.3954*	348.7480*	1752.361*	908.7997*	3213.632*	231.2717*
<i>SIC</i>	0.9941	1.6360	1.3230	2.9630	−0.4895	1.9287
<i>Q(10)</i>	14.522	34.490*	49.925*	18.500	49.929*	18.261

Signifikanzniveau : * = 0,01.

Tabelle 3.9: Beurteilung der EGARCH(1,1)-Schätzung

3.5 TGARCH-Modell

3.5.1 Theorie und Definition des TGARCH-Modells

Eine Möglichkeit zur Modellierung des Leverage-Effekts ist das Threshold-GARCH-Modell (TGARCH).⁷⁴ Dieses Modell geht wie das EGARCH-Modell von einem asymmetrischen Einfluß vergangener Schocks auf die bedingte Varianz aus. Bei dieser Variante ist die Varianzgleichung nicht in Logarithmen definiert, sondern es wird zwischen positiven und negativen Einflüssen (Nachrichten/Schocks) unterschieden. Bei diesem Modelltyp hängt die funktionale Abhängigkeit zwischen bedingter Varianz sowie vergangenen Störungen und Varianzen von der Größe der vergangenen Störungen ab. Wenn z. B. unterschiedliche Reaktionen auf positive und negative Einflüsse angenommen werden, enthält das Modell einen Schwellenwert (Schwellenwert) von Null. Damit können asymmetrische Reaktionen wie der Leverage-Effekt berücksichtigt werden. In der Literatur werden zwei unterschiedliche TGARCH-Modelle vorgestellt. Ein Modell stammt von Glosten, Jagannathan und Runkle⁷⁵ und der andere Ansatz wurde von Zakoian⁷⁶ entwickelt. Glosten, Jagannathan und Runkle haben vorgeschlagen, eine

⁷⁴Vgl. Glosten, L.R.; Jagannathan, R.; Runkle, D. Relation, 1993, S. 1779-1801 und Zakoian, J.-M., Threshold, 1994, S. 931-955.

⁷⁵Glosten, L.R. et al. verwenden eine stückweise lineare Funktion für die Varianz.

⁷⁶Vgl. Zakoian, J.-M. verwendet eine stückweise lineare Funktion für die Standardabweichung.

Dummy-Variable einzuführen, die für negative Einflüsse den Wert eins und für positive Einflüsse den Wert null annimmt.

Es ergibt sich dann die folgende Varianzgleichung:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i + \gamma d_{t-i}) \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2 \quad (3.38)$$

$$\text{mit } d_{t-i} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases},$$

wobei die Nichtnegativität durch die Bedingung $a_0 > 0, a_i + \gamma > 0$ und $\beta_j > 0$ gewährleistet wird. In dieser Modellvariante haben positive Einflüsse ausschließlich eine Wirkung gemäß dem Parameterwert a_i , während negative Einflüsse die bedingte Varianz durch den die Dummy-Variable enthaltenen Faktor (γd_{t-i}) erhöht. Für $\gamma = 0$ reduziert sich das Modell zu einem einfachen symmetrischen GARCH-Modell.

Eine ähnliche Modellierung erfolgt im Modell von Zakoian. Dieses Modell modelliert die Asymmetrien in den Volatilitäten durch Trennung der Renditezeitreihe in positive und negative Veränderungen, welche die bedingte Varianz positiv oder negativ beeinflussen. Die Modellierung erfolgt anhand der Standardabweichung und nicht durch die Varianz, da mit absoluten Abweichungen eine effizientere Schätzung erzielt werden kann als mit quadrierten Residuen.⁷⁷ Das Modell von Zakoian hat folgende Form:

$$\sigma_t = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i^+ \varepsilon_{t-1}^+ - a_i^- \varepsilon_{t-1}^-) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1} \quad (3.39)$$

$$\text{mit } \varepsilon_{t-1}^+ = \max(0, \varepsilon_{t-1}); \varepsilon_{t-1}^- = \min(\varepsilon_{t-1}, 0).$$

Für $a_i^+ = a_i^-$ für $i = 1, 2, \dots, q$ reduziert sich auch dieses TGARCH-Modell zum einfachen GARCH-Modell.

In diesen beiden vorgestellten TGARCH-Modellvarianten beeinflussen negative Einflüsse die bedingte Standardabweichung bzw. die bedingte Varianz stärker als

⁷⁷Vgl. Zakoian, J.-M., Threshold, 1994, S. 933.

positive Nachrichten.

3.5.2 Schätzung und empirische Ergebnisse des TGARCH-Modells

Um den in den Renditereihen vermuteten Leverage-Effekt zu berücksichtigen, wurde das TGARCH(1,1)-Modell von Glosten, Jagannathan und Runkle ausgewählt. Dieses besagt, dass die Volatilität bei Kursverlusten tendenziell stärker zunimmt als bei Kursgewinnen gleicher Größe.⁷⁸ Dabei wurde folgende Gleichung für die Schätzung des Modells verwendet:

$$\sigma_t^2 = a_0 + (a_1 + \gamma d_{1-i}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (3.40)$$

Für alle Renditereihen des hier verwendeten Datenmaterials wurde ein TGARCH-Modell mit statistisch signifikanten Parametern geschätzt. Betrachtet man den Asymmetrieparameter γ in Tabelle 3.10, erkennt man, dass dieser für alle geschätzten Renditen einen positiv signifikanten Wert ($\gamma > 0$) hat. Somit konnte eine asymmetrische Reaktion der Volatilität auf exogene Schocks in den Renditereihen festgestellt werden, was die Hypothese des Leverage-Effektes für die untersuchten Finanzmarktdaten bestätigt. Bei dem geschätzten TGARCH-Modell für den Brent-Rohölpreis wird der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 als nicht signifikant ausgewiesen. Ebenfalls nur eingeschränkt verwendbar sind die geschätzten Modelle der folgenden Renditereihen: Der Dax-Index, der EON-Aktie, der E-Stoxx Index und der Euro/Dollar Wechselkurs, da der Parameterwert des ARCH-Terms a_1 als hoch signifikant negativ geschätzt wurde. Negative Parameter verletzen aber die Annahmen des TGARCH-Modells.⁷⁹

⁷⁸vgl. Schmid, F.; Trede, M., Analyse, 2005, S. 182.

⁷⁹Vgl. hierzu Abschnitt 3.5.1.

<i>TGARCH</i>	γ	a_0	a_1	β_1
<i>Dax</i>	0.03868* (11.6074)	0.00031* (2.61029)	-0.01675* (-44.99949)	0.99509* (486.3481)
<i>Eon</i>	0.03155* (2.89333)	0.13564* (3.67716)	-0.0672* (-19.667)	0.6286* (5.48226)
<i>E - Stox</i>	0.02067* (10.2101)	4.41E - 05 (0.34588)	-0.01003* (-9.04488)	0.99799* (1592.566)
<i>EADS</i>	0.03022* (5.02366)	0.02109* (3.99476)	0.00861* (2.0227)	0.95922* (136.9303)
<i>Eur/US\$</i>	0.03688* (3.45938)	0.00825* (2.49969)	-0.04183* (-5.44316)	0.84096* (12.5589)
<i>Brent</i>	0.02649* (3.181616)	0.00766* (2.90728)	0.00282 (0.59169)	0.96535* (100.4837)

Signifikanzniveau :

* = 0,01

Tabelle 3.10: Ergebnisse der TGARCH(1,1)-Schätzung

3.5.3 Beurteilung des TGARCH-Modells

Zur Beurteilung der Güte des TGARCH(1,1)-Modells für die dargestellten Schätzergebnisse des hier verwendeten Datenmaterials werden die bekannten Spezifikationstests verwendet. Die in Tabelle 3.11 ausgewiesenen statistischen Eigenschaften der standardisierten Residuen machen deutlich, dass es durch die Verwendung eines TGARCH(1,1)-Modells gelungen ist, die Abweichungen für vier Renditezeitreihen von der Normalverteilung zu reduzieren. Dabei besitzen alle Residuen, bis auf die

<i>TGARCH</i>	<i>DAX.</i>	<i>EON</i>	<i>E - Stox</i>	<i>EADS</i>	<i>EUR/US\$</i>	<i>Brent</i>
<i>ar.M</i>	-0.0187	0.0247	-0.0078	0.0068	0.0119	-0.0047
<i>St.Abw.</i>	1.0298	0.9530	1.0563	1.0039	0.8673	1.0021
<i>Schiefe</i>	-0.0051	-0.2515	-0.6425	0.3866	-0.3441	0.0613
<i>Kurtosis</i>	5.1378	5.7183	7.2265	7.4151	10.7309	5.1261
<i>J - B</i>	219.2010*	366.5128*	935.9079*	963.5719*	2891.561*	217.5174*
<i>SIC</i>	0.9987	1.6358	1.2374	2.9722	-0.4573	1.9263
<i>Q(10)</i>	14.354	33.879*	36.704*	18.548	55.465*	14.777

Signifikanzniveau :

* = 0,01.

Tabelle 3.11: Beurteilung der TGARCH(1,1)-Schätzung

Schätzparameter der EON-Aktie und des Wechselkurses, einen Mittelwert von null und eine Varianz von eins. Anhand der Jarque-Bera-Test-Statistik wird deutlich, dass die Nullhypothese einer Normalverteilung für alle Renditereihen höchst signifikant verworfen wird. Demnach haben die geschätzten Renditen immer noch eine

leptokurtische Verteilung.

Es müssen noch die quadrierten Residuen untersucht werden. Die Ergebnisse liefert die Ljung-Box-Teststatistik, die die Nullhypothese unkorrelierter Residuen prüft. Anhand dieser Teststatistik kann festgestellt werden, ob das geschätzte TGARCH(1, 1)-Modell die Abhängigkeiten zwischen den bedingten Varianzen erklären kann. Für die quadrierten Residuen des DAX-Indexes, der EADS-Aktie und des Brent-Rohölpreises kann die Nullhypothese beibehalten werden. Somit hat das TGARCH(1, 1)-Modell die sich im Zeitablauf ändernde Volatilität gut erfasst. Allerdings kann dieses Ergebnis für die anderen drei Renditereihen nicht durch die Ljung-Box-Teststatistik bestätigt werden, da hier die Nullhypothese unkorrelierte quadrierter Residuen hochsignifikant verworfen wird. Dies bedeutet für die geschätzten Renditereihen der EON-Aktie, des E-Stoxx-Indexes und des Euro-Dollar-Wechselkurses, dass das TGARCH(1, 1)-Modell die sich ändernde Volatilität nicht optimal modellieren kann.

3.6 Kapitalmarkteffizienz

Bei den Kapitalmarktmodellen wird im Allgemeinen vorausgesetzt, dass allen Marktteilnehmern die bewertungsrelevanten Informationen vollzählig und stets zur Verfügung stehen.⁸⁰ Das Problem der Informationsverarbeitung wird auf diese Weise umgangen. Um die Informationsverarbeitung zu prüfen, wurde das Konzept informationseffizienter Märkte entwickelt und soll imfolgenden kurz vorgestellt werden.

3.6.1 Grundlagen und Eigenschaften

Kapitalmarkteffizienz bezieht sich auf die Informationsverarbeitung an Kapitalmärkten und wird aus diesem Grund auch als Informationseffizienz definiert. Um von einem vollkommenen Kapitalmarkt zu sprechen, dürfen weder Transaktions- und Informationskosten noch Beschränkungen des Marktzugangs vorliegen. Markteffizienz ist mithin ein Bestandteil des vollkommenen Marktes. Die bekannteste

⁸⁰Vgl. Abschnitt 4.1.1.

Definition geht auf Fama zurück; danach ist ein Kapitalmarkt effizient, wenn der jeweilige Preis alle in Betracht kommenden Informationen vollständig und richtig reflektiert.⁸¹ Kapitalmarkteffizienz liegt vor, wenn neue Informationen auftreten und diese von den Marktteilnehmern unverzüglich wahrgenommen und hinsichtlich ihrer Preisrelevanz richtig beurteilt werden. Fama differenziert zwischen drei Formen von Effizienz in Abhängigkeit von den Informationen, die im jeweiligen Preis enthalten sind.⁸²

Die schwache Form der Informationseffizienz beinhaltet nur die Information der historischen Kursentwicklung. Eine technische Aktienanalyse kann auf schwach effizienten Märkten somit keine überdurchschnittliche Rendite erzielen. Vergangene Kurszeitreihen enthalten keine Muster oder Autokorrelationen, die zur Prognose der zukünftigen Kursentwicklung gewinnbringend verwendet werden können.

Die halbstrenge Form der Informationseffizienz umfaßt zusätzlich noch alle gegenwärtig öffentlich verfügbaren Informationen, die in den laufenden Kursnotierungen vollständig und richtig reflektiert sind. Dies bedeutet, dass aus der fundamentalen Aktienanalyse keine gewinnbringenden Informationen gezogen werden können, da diese Informationen so schnell in den Kursen verarbeitet werden, sobald sie publik werden.

Die strenge Form der Informationseffizienz gilt für einen Markt, falls sämtliche Informationen, folglich auch nicht öffentliche (private), in den Wertpapierkursen vollständig berücksichtigt werden. In einem streng informationseffizienten Markt können Personen nicht einmal mit Insiderwissen überdurchschnittliche Gewinne erzielen. Fama betont jedoch, dass diese Form der Markteffizienz lediglich als ein theoretisches Ideal mit Modellcharakter anzusehen ist.⁸³

3.6.2 Die Random-Walk-Hypothese

Für die empirische Überprüfung der einzelnen Formen der Informationseffizienzhypothese ist es notwendig, den Preisbildungsprozess zu modellieren. Sämtliche Infor-

⁸¹vgl. Fama, E. F., Capital, 1970, S. 383.

⁸²vgl. Fama, E. F., Capital, 1970, S. 383ff.

⁸³vgl. Fama, E. F., Capital, 1970, S. 388.

mationseffizienzhypothesen beruhen auf sogenannten Überrenditen. Dabei erfolgt die Modellierung über Abweichungen der Gleichgewichtsrenditen.

Die folgenden Definitionen beruhen auf den Arbeiten von Fama⁸⁴ sowie Granger und Morgenstern⁸⁵. Dabei werden vielfach alle drei folgenden Definitionen unter dem Begriff Random-Walk-Hypothese zusammengefaßt und durch verschieden strenge Versionen der Effizienz klassifiziert. Der Begriff Preisänderung (Rendite) wird als Änderung der logarithmierten Preise $x_t = \ln(P_t)$ verwendet.

Das random-walk-Modell besagt, dass Preisänderungen $y_t = x_t - x_{t-1}$ den Realisationen eines reinen Zufallsprozess folgen und nicht prognostiziert werden können. Die Preisänderung ist eine unkorrelierte und identisch verteilte Zufallsvariable deren Erwartungswert null beträgt. Es gilt:

$$f(y_{t+1} \mid \psi_t) = f(y_{t+1}). \quad (3.41)$$

Eine genauere Spezifikation der Dichte $f(\cdot)$ und der Informationsmenge ψ_t ist nicht erforderlich. Überlicherweise wird angenommen, dass ψ_t alle zum Zeitpunkt t verfügbaren Informationen beinhaltet. Das Modell drückt damit aus, dass die Kenntnis von gegenwärtigen und vergangenen Renditen für die Anlageentscheidungen irrelevant sind. Werden Autokorrelationen in den Renditen gefunden, so weist dies im Rahmen des random-walk-Modells auf eine Ineffizienz des Marktes hin. Auf Unabhängigkeit in der Zeitreihe wird aber erst dann geschlossen, wenn auch keine nichtlinearen Abhängigkeiten, d.h. die Varianz der Renditeverteilung ist konstant, festgestellt werden.

Ein weiteres Modell zur Beschreibung und Analyse der Kapitalmarkteffizienz ist das martingale-Modell. Das martingale-Modell besagt, dass der bedingte Erwartungswert von Preisänderungen gleich null ist. Es gilt:

$$E(y_{t+1} \mid \psi_t) = 0 \text{ bzw. } E(x_{t+1} \mid \psi_t) = x_t \quad (3.42)$$

und $x_t = y_t + y_{t+1} + \dots$ wird als martingale bezeichnet.

⁸⁴vgl. Fama, E. F., Behaviour, 1965, S. 34-105.

⁸⁵Vgl. Granger, C. W. J.; Morgenstern, O., Predictability, 1970.

Dieses Modell ist wesentlich weniger restriktiv als das random-walk-Modell, da es keine Aussagen über Momente einer höheren Ordnung als eins, wie z.B. die Varianz, Schiefe und Kurtosis, macht. Die Verteilung der Preisänderungen kann allerdings von y_{t+1} abhängen. Das Modell besagt, dass die optimale Prognose des zukünftigen Preises x_{t+1} auf Basis des Informationsstandes ψ_t der aktuelle Preis x_t ist. Dies bedeutet aber auch, dass der aktuelle Preis dem erwarteten Preis für alle zukünftigen Preise entspricht:

$$E(y_{t+k} \mid \psi_t) = 0 \text{ bzw. } E(x_{t+k} \mid \psi_t) = x_t \quad \forall k > 0. \quad (3.43)$$

Die Unabhängigkeit der Preisänderungen im martingale Modell folgt aus der Bedingung $E(y_{t+k} \mid \psi_t) = 0$. Aus der martingale Eigenschaft von x_t folgt, dass

$$x_t = x_{t-1} + y_t \quad E(y_t) = 0, E(y_t y_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0. \quad (3.44)$$

Aus der Beziehung $x_t = x_{t-1} + y_t$ unter den in Gleichung 3.44 genannten Bedingungen folgt, dass der random walk ein Fall des martingals ist, wenn x_t identisch verteilt ist. Durch die Unabhängigkeit der Preisänderungen wird eine wichtige empirische Eigenschaft des martingale Modells erkennbar, nämlich das Vorliegen eines Autokorrelationskoeffizienten von null. Autokorrelationen in den Preisänderungen sind dann ein Indikator für die Ineffizienz eines Marktes, wenn diese durch sich im Zeitablauf verändernde Gleichgewichtserträge verursacht werden.

Das submartingale-Modell besagt, dass der bedingte Erwartungswert von Preisänderungen größer gleich null ist. Es gilt:

$$E(y_{t+1} \mid \psi_t) = E(y_{t+1}) = \mu \geq 0 \text{ bzw. } E(x_{t+1} \mid \psi_t) \geq x_t. \quad (3.45)$$

Bei stetig steigenden Kursen im Rahmen des submartingale-Modells lassen sich auf einem effizienten Kapitalmarkt mit auf der Informationsbasis ψ_t beruhenden trading rules der technischen Aktienanalyse keine systematisch höheren Renditen erzielen als mit einer wahllosen Buy and Hold Strategie.⁸⁶

⁸⁶vgl. Fama, E. F., Capital, 1970, S. 386.

3.6.3 Beurteilung des Konzeptes der Kapitalmarkteffizienz

Es stellt sich die Frage, ob ein Markt überhaupt perfekt effizient sein kann. Die Kritiker der Effizienzmarkthypothese behaupten, dass Famas Theorie die komplexe Realität in ihren zahlreichen Facetten nicht vollständig berücksichtigt.⁸⁷ Dabei stehen im Zentrum der Kritik die zugrunde liegenden Annahmen der Effizienzmarkthypothese über die vollkommenen Märkte, fehlender Transaktionskosten und letztendlich allen im gleichen Maße zugängliche Informationen.

Grossman und Stiglitz argumentieren, dass positive Überrenditen sogar eine notwendige Bedingung für informationseffiziente Märkte darstellen, sofern das Beschaffen und Verarbeiten von Informationen Kosten verursacht.⁸⁸ Die Überrenditen dienen dann als Entschädigung und Anreiz für die Marktteilnehmer, relevante Informationen zu beschaffen, aufzubereiten und zu verarbeiten. Andernfalls würden rationale Investoren auf eine Informationsverarbeitung verzichten. Diese stellt jedoch wiederum die Grundbedingung für informationseffiziente Märkte dar. Märkte müssen also im Gleichgewicht in einem Ausmaß informationsineffizient sein, welches die mit der Informationsbeschaffung und -auswertung verbundenen Kosten deckt. In der Praxis sollten allerdings sinkende Kosten für die Beschaffung und Verarbeitung von Informationen in grossen und liquiden Märkten nur kleine Überrenditen zulassen.

Jeder empirische Test der Effizienzhypothese basiert auf einer Definition der normalen Rendite, d.h., man benötigt ein Bewertungsmodell, das die Preisbildung der untersuchten Wertpapiere adäquat erklärt und als Vergleichsmaßstab (Benchmark) dient. Wird die Nullhypothese der Kapitalmarkteffizienz abgelehnt, kann dies einerseits bedeuten, dass der untersuchte Markt ineffizient ist, und andererseits, dass das unterstellte Bewertungsmodell falsch ist. Man spricht auch von einer "Verbundhypothese" ("joint-hypothesis"). Die Ergebnisse von Tests der Effizienzhypothese können daher nicht eindeutig interpretiert werden.

⁸⁷Vgl. Grossman, S. J.; Stiglitz, J. E., *Impossibility*, 1980; Verrecchia, R. E., 1982; Figlewski, S., *Market*, 1978.

⁸⁸Vgl. Grossman, S. J.; Stiglitz, J. E., *Impossibility*, 1980, S. 383-408.

Daher soll in dieser Arbeit die schwache Form der Informationseffizienz für Finanzmarktdaten überprüft werden. Dabei werden das random-walk-Modell und das martingale-Modell verwendet. Gemäß dem random-walk-Modell sind Preisänderungen nicht prognostizierbar und die Preisänderungen aufeinander folgender Zeiträume müssen voneinander unabhängig sein. Wird diese Hypothese bestätigt, so können die in dieser Arbeit untersuchten Finanzmarktdaten als informationseffizient bezeichnet werden, andernfalls würde die Informationseffizienzhypothese in Frage gestellt. Wird die Hypothese in Frage gestellt, dann werden die Finanzmarktdaten anhand des martingale-Modells auf Informationseffizienz überprüft. Dieses Modell ist wesentlich weniger restriktiv als das random-walk-Modell, da es keine Aussagen über Momente einer höheren Ordnung als eins macht. Für das martingale-Modell gilt, dass der bedingte Erwartungswert von Preisänderungen gleich null ist.

Die quadrierten Residuen des Dax-Indexes weisen nach der Standardisierung mittels der verschiedenen Volatilitätsschätzungen keine signifikanten Autokorrelationen mehr auf. Bis auf die ARCH(1)-Schätzung weisen die EADS- und der Brent-Renditereihe nach der Standardisierung mittels der restlichen Volatilitätsschätzungen keine signifikanten Autokorrelationen mehr auf. Mit Hilfe des Ljung-Box-Tests kann die Nullhypothese serieller Korrelation bei diesen drei quadrierten Residuen eindeutig verworfen werden. So konnten die ARCH-Effekte dieser untersuchten Renditereihen durch die betrachteten Modelle fast vollständig erfaßt werden. Diese drei standardisierten Renditen der Modellschätzung genügen somit einem reinen Zufallsprozeß und weisen keine erkennbaren systematischen Zusammenhänge mehr auf. Damit erfüllen diese drei Finanzmarktdaten die Voraussetzungen eines random-walk-Modells und können demnach nicht prognostiziert werden. Also kann von einem schwach informationseffizienten Kapitalmarkt für die Dax-, die EADS- und die Brent-Renditereihe gesprochen werden.

Allerdings sind bei der Eon-, Estoxx- und die Euro/US\$- Renditereihen noch signifikante Autokorrelation in den quadrierten Residuen zu erkennen. Dies kann dadurch erklärt werden, das auch weit zurückliegende quadrierte Renditen mit den aktuellen quadrierten Renditen noch hoch zu korrelieren scheinen. Diese Beobachtung leitet über zu einer letzten stilisierten Eigenschaft von Kapitalmarktdaten,

dem Phänomen des langen Gedächtnisses, das sich vor allem durch höhere Momente von Kapitalmarktrenditen auszuzeichnen scheint.⁸⁹ Somit genügen diese drei standardisierten Renditen der Modellschätzung nicht einem reinen Zufallsprozeß und erfüllen damit nicht die Voraussetzungen eines random-walk-Modells. Daraus folgt für die Eon-, Estoxx- und die Euro/US\$- Renditereihen, dass sie im Sinne des random-walk-Modells informationsineffizient sind. Bei dem martingale-Modell werden nichtlineare Abhängigkeiten in den Preisänderungen zugelassen. Im Sinne des martingale-Modells sind die Eon-, Estoxx- und die Euro/US\$-Renditereihen dann informationseffizient, wenn der bedingte Erwartungswert von den Preisänderungen gleich null ist. Da alle Mittelwerte des untersuchten Datenmaterials nach der jeweiligen GARCH-Schätzung annähernd bei null liegen, kann die Hypothese für das martingale-Modell, dass ein informationseffizienter Kapitalmarkt für die untersuchten Finanzmarktdaten vorliegt, bestätigt werden.

3.7 Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse

Die statistischen Eigenschaften der in dieser Arbeit geschätzten Renditereihen machen deutlich, dass es mit Hilfe der betrachteten GARCH-Modelle gelungen ist, die Abweichungen der Renditeverteilungen von der Normalverteilung zu reduzieren. So liegen alle Mittelwerte annähernd bei null und ihre Standardabweichungen um eins herum. Die Schiefe ist in den meisten Fällen unverändert, somit haben die untersuchten Renditereihen weiterhin eine links- oder rechtsschiefe Verteilung. Auch die Werte der Kurtosis konnten meist verringert werden, jedoch sind die Werte ausnahmslos größer als drei, dem Wert der Normalverteilung. Durch diese statistischen Kennzahlen sind für die geschätzten Renditen noch immer signifikante Abweichungen von der Normalverteilung zu erkennen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die sechs untersuchten Renditereihen Abhängigkeiten in den Varianzen haben und somit die typischen Merkma-

⁸⁹Baillie et al. schlagen zur Lösung dieses Problems das Konzept der fraktionalen Integration vor. Vgl. Baillie, R.T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H.O., Fractionally, 1996, S. 3-30.

le von Finanzmarktdaten (Leptokurtosis, Volatilitäts-Cluster und Leverage-Effekt) aufweisen. Die Modelle der GARCH-Familie sind in der Lage, die Strukturen in den Veränderungsraten der in dieser Arbeit untersuchten Renditereihen adäquat zu modellieren. Dabei stellte sich das GARCH-M-Modell als unterlegene Spezifikation dar, da es den größten SBC-Wert hat. Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass das GARCH-Modell und das EGARCH-Modell bei der Modellierung der verwendeten Renditereihen die besten Anpassungen an die zu untersuchenden Daten liefern.

Kapitel 4

Finanzmarktdaten und Risikomaße

Innerhalb der Kapitalmarkttheorien ist das Risiko gleichbedeutend wie die erwartete Rendite eines Wertpapiers. Dabei wird der Begriff des Risikos als das Abweichen von geplanten Größen in beide Richtungen verstanden.⁹⁰ Im Laufe der Zeit haben sich unterschiedliche Risikomaße für verschiedene Anlagekategorien als nützlich erwiesen. Im Fokus stand die Entwicklung von Risikomaßen der Anlagekategorie Aktien.⁹¹ Im Folgenden sollen zwei ausgewählte Risikomaße näher beschrieben und untersucht werden. Für den Bereich des Risikomanagements wird der Value-at-Risk als erstes Risikomaß erläutert. Danach wird der Betafaktor für den Bereich der Wertpapierbewertungsmodelle als zweites Risikomaß diskutiert.

4.1 Value at Risk

Der Value-at-Risk ist ein Risikomaß und fasst in einer einzelnen Wertgröße den erwarteten maximalen Wertverlust aus einer Einzelposition oder einem Portfolio, bestehend aus Finanzinstrumenten, über einen bestimmten Zeithorizont mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit zusammen.⁹²

⁹⁰Vgl. Steiner, M.; Bruns, C., Wertpapiermanagement, 2007, S. 53.

⁹¹Vgl. Steiner, M.; Bruns, C., Wertpapiermanagement, 2007, S. 55.

⁹²Erste Ansätze zur Risikobeurteilung wurden von Hicks eingeführt. Dabei definiert Hicks die „Duration“ als die durchschnittliche Bindungsdauer des eingesetzten Kapitals und dient der

Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen für die Bestimmung des Value-at-Risks, auch unter der Berücksichtigung von G(ARCH)-Effekten, vorgestellt. Im Anschluß erfolgt die Schätzung des Value-at-Risks für drei Aktien und den DAX-Index, anhand ausgewählter Modellspezifikationen. Die Ergebnisse für diese Wertpapierpositionen werden im Rahmen einer abschließenden Beurteilung der vorgenommenen Modellschätzungen gegenübergestellt.

4.2 Value-at-Risk als Riskomaß

Das Konzept des Value-at-Risk (VaR) gewann erst in den letzten 10 bis 15 Jahren an Bedeutung, da zu Beginn der neunziger Jahre des letzten Jahrhunderts die Suche nach einsetzbaren Risikomanagementsystemen intensiviert wurde. Gründe hierfür sind, dass für einige Unternehmen das rasch wachsende Handelsvolumen von Finanzderivaten zu großen finanziellen Schwierigkeiten führte, sowie dass eine zunehmende Schwierigkeit entstand, strukturierter Portfolios zu überschauen. Insbesondere nach dem Zusammenbruch namhafter Unternehmen, infolge von riskanten Spekulationsgeschäften - zu nennen sind hier beispielsweise Orange County und Barings⁹³-, beschäftigten sich Aufsichtsbehörden weltweit mit der Messung von Marktrisiken⁹⁴ und der erforderlichen Eigenkapitalabsicherung riskanter Positionen. Für den Finanzsektor erwies sich die Basler Eigenkapitalempfehlung von 1988, die mittlerweile in über 100 Ländern angewendet wird⁹⁵, in Verbindung mit dem Basler Marktrisikopapier von 1996⁹⁶ als wegweisend. Im Jahr 2001 wurden weiterentwickelte Kriterien ("Basel II") veröffentlicht, die seit dem Jahr 2004 gültig sind.⁹⁷ Basel II verstärkt die Bedeutung interner Risikomodelle. Ziel solcher interner Risikomodelle ist die zeitnahe Berechnung eines potentiellen Risikobetrages auf der Basis mathematisch-statistischer und ökonometrischer Methoden.

Risikobeurteilung. Dabei ist die Duration das Maß für das Zinsänderungsrisiko bei festverzinslichen Wertpapieren. Vgl. Hicks, J. R., Value, 1939, S. 12ff.

⁹³Vgl. Jorion, P., Value at Risk, 2001, S. 29ff.

⁹⁴Zum Marktrisiko werden Rohstoffpreissrisiken, Währungsrisiken, Zinsänderungsrisiken sowie Aktienkursrisiken gezählt.

⁹⁵Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, 2001a.

⁹⁶Vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht, Änderung, 1996.

⁹⁷Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, 2001b.

Der Value-at-Risk ist ein solches internes Modell, mit dem die Berechnung der in den Richtlinien geforderten Mindesteigenkapitalausstattung eines Unternehmens, z.B. einer Bank, durchgeführt werden kann. Der VaR ist ein Risikomaß und fasst in einer einfachen Wertgröße den erwarteten maximalen Wertverlust aus einer Einzelposition oder einem Portfolio, bestehend aus Finanzinstrumenten, über einen bestimmten Zeithorizont, z.B. einen Handelstag mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit, z.B. 95% oder 99%, zusammen.⁹⁸ Das Risiko wird dabei unmittelbar durch einen bestimmten Geldbetrag quantifiziert.

Bei dem VaR-Konzept handelt es sich um eine Modellbetrachtung. Modelle stellen eine Vereinfachung der tatsächlichen Gegebenheiten dar, so dass die Ergebnisse stets kritisch zu überprüfen sind und nur als Entscheidungshilfe für die Risikosteuerung dienen sollten.

Der VaR wird ganz allgemein als der in Geldeinheiten gemessene Verlustbetrag einer (Finanz-)Vermögensposition definiert, der bei einem bestimmten Sicherheitsniveau $(1 - \alpha)$ innerhalb eines definierten Zeitraums h nicht überschritten wird, wobei der historische Verlauf der Vermögensposition bis zum Zeitpunkt h bekannt ist. Dann kann der VaR formal in folgender Gleichung dargestellt werden:

$$P(L_h \geq VaR_h) = \alpha \quad (4.1)$$

Damit gibt der VaR einen Verlust $L_h = -\Delta V_h$ ⁹⁹ $= V_t - V_{t+h}$ an, der mit einer Wahrscheinlichkeit von α in der Zukunft $(t + h)$ nicht überschritten wird.

Aus obiger Gleichung wird deutlich, dass die Schätzung des VaR dem Auffinden eines speziellen Quantils der Verteilung der Wertänderung gleichkommt (vgl. Abbildung 4.4). Um den in Geldeinheiten gemessenen Verlust der Finanzposition zu erhalten, ist das zu α gehörende Quantil, bezeichnet mit c , mit dem aktuellen Marktwert der Finanzposition V_t zu multiplizieren.

$$VaR_h = c_\alpha \cdot V_t. \quad (4.2)$$

⁹⁸Vgl. Jorion, P., Value at Risk, 2001, S. 19.

⁹⁹ $\Delta V_h = V_{t+h} - V_t$ kennzeichnet die entsprechende Marktwertänderung der Finanzposition über das Zeitintervall $[t, t + h]$.

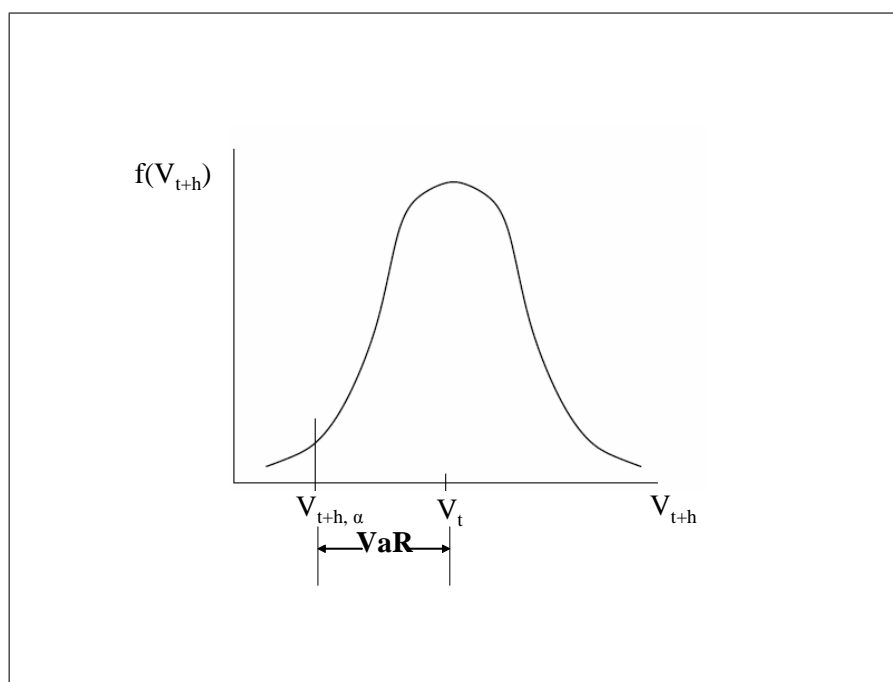


Abbildung 4.1: Der Value at Risk als Quantil $V_{t+h, \alpha}$ der Verteilung der Wertminderung des Portfolios von heute auf morgen.

4.2.1 Methoden zur Messung des Marktrisikos mit Value at Risk

Zur Berechnung des Value at Risk werden im wesentlichen drei unterschiedliche Verfahren eingesetzt, die Varianz-Kovarianz-Methode, die Monte-Carlo-Simulation und die historische Simulation. Diese Verfahren sollen im folgendem kurz vorgestellt werden.¹⁰⁰

Während die Varianz-Kovarianz-Methode und die Monte-Carlo-Simulation auf theoretischen Verteilungsannahmen beruhen, wird bei der historischen Simulation keine Verteilungsannahme der Renditen getroffen. Bei der historischen Simulation handelt es sich somit um ein nichtparametrisches Modell.

Bei dem Verfahren der historischen Simulation wird implizit von der Annahme ausgegangen, dass die Verteilung der Renditen als konstant anzusehen ist. Bei

¹⁰⁰Eine ausführliche Beschreibung der Verfahren findet sich bei Jorion (2001).

diesem Verfahren wird die empirische Verteilung der vergangenen Portfoliorenditen verwendet.

Für die Berechnung des VaR ist zuerst eine historische Zeitreihe, bestehend aus relativen, diskreten Portfoliowertänderungen aufzustellen.¹⁰¹ Für diese Zeitreihe wird eine bestimmte Fenstergröße festgelegt.¹⁰² Damit ist eine konstante Datenbasis gemeint, bei der - sobald ein neuer VaR-Wert berechnet wird - die älteste Rendite durch die neu hinzugekommene ersetzt wird. Der VaR auf einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsniveau entspricht dann dem entsprechenden Quantil des Verlustes der Finanzposition und wird direkt auf Portfolioebene ermittelt. Werden diese Portfoliowertänderungen der Größe nach geordnet, kann der VaR anhand der simulierten Wertänderungen ermittelt werden.

Vorteile der historischen Simulation sind die einfache Implementierung, die einfache Aggregation von Risikogrößen über verschiedene Portfolien und die Tatsache, dass keine Annahmen über die Verteilungsfunktion gemacht werden. Nachteilig ist eine gewisse Instabilität des Schätzers auf Grund der normalerweise geringen Anzahl der berechneten zukünftigen Portfoliowertänderungen. Somit ist die historische Simulation das einfachste Modell zur Berechnung des VaR.

Die Varianz-Kovarianz-Methode und die Monte-Carlo-Simulation sind parametrische Modelle und arbeiten mit theoretischen Verteilungsannahmen. Die Modelle unterstellen in der Regel eine Normalverteilung der Renditen, wobei die Parameter μ und σ aus den historischen Marktdaten geschätzt werden.

Die Varianz-Kovarianz-Methode bestimmt den VaR direkt als Funktion der Standardabweichung der Portfoliorendite σ . Damit ergibt sich die folgende Berechnungsformel für den VaR unter der Annahme, dass die Renditen der Finanzposition normalverteilt sind¹⁰³:

$$VaR_h = c_\alpha \cdot \sigma \cdot V_t. \quad (4.3)$$

¹⁰¹Da bei der historischen Simulation keine Verteilungsannahmen zugrunde liegen, kann auf diskrete Wertänderungen für die VaR-Berechnung zurückgegriffen werden, vgl. Schierenbeck, H., Bankmanagement, 2001, S. 84.

¹⁰²Vgl. Manganelli, S.; Engle, R., Value at Risk Models, 2001, S. 10.

¹⁰³Für die Berechnung des Value at Risk eines Portfolios wird in der Regel ein Erwartungswert von Null angenommen (was vor allem für kurze Zeitintervalle, etwa ein Tag, eine Woche, als erfüllt angesehen werden kann) und wird daher im folgenden vernachlässigt.

Aus der obigen Gleichung erkennt man, dass der Value at Risk proportional zur Standardabweichung ist. Die Varianz-Kovarianz-Methode hat gegenüber den anderen Modellen zur Risikomessung den Vorteil der besonders schnellen und einfachen Risikomessung.¹⁰⁴ Ein Nachteil des Varianz-Kovarianz-Ansatzes ist die Normalverteilungsannahme, die die zu beobachtende leptokurtische Verteilung von Marktpreisänderungen vernachlässigt.

Die Monte-Carlo-Simulation ist dadurch gekennzeichnet, dass mit den geschätzten Parametern normalverteilte Zufallszahlen generiert werden, um die zukünftigen Renditen zu simulieren. Hierbei werden mehrere 1000 zufällige Marktpreisänderungen generiert und in Portfoliowertänderungen umgerechnet. Der Value at Risk ergibt sich dann aus dem entsprechenden Quantil der simulierten Portfoliowerte. Der Ablauf der Monte-Carlo-Simulation kann wie folgt beschrieben werden:¹⁰⁵

1. Vorgabe der stochastischen Prozesse für Preisänderungen oder preisbestimmende Faktoren, die theoretisch für jede einzelne Position unterschiedlich sein können. Dadurch wird implizit die zu simulierende Verteilung dieser Verteilung spezifiziert.¹⁰⁶
2. Generierung von Zufallszahlen für die Residuen des stochastischen Prozesses $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t)$ und Simulation der Preise oder preisbestimmenden Faktoren anhand der vorgegebenen stochastischen Prozesse.
3. Vollständige Neuberechnung der Portfoliowerte mit den simulierten Werten jedes Durchlaufs.
4. Wiederholung der Schritte zwei und drei, bis von einer ausreichend guten Annäherung der Simulation ausgegangen werden kann.

Ein Vorteil der Monte-Carlo-Simulation ist, dass neben der Normalverteilung auch andere theoretische Verteilungen simuliert werden können. Im Unterschied

¹⁰⁴Vgl. Jorion, P., Value at Risk, 2001, S. 214.

¹⁰⁵Vgl. Jorion, P., Value at Risk, 2001, S. 292.

¹⁰⁶Vgl. Meyer, C., Value at Risk für Kreditinstitute, 1999, S. 202.

zur Varianz-Kovarianz-Methode können so auch Produkte mit stark nichtlinearem Risiken in die Berechnung einbezogen werden. Ein Nachteil der Monte-Carlo-Simulation ist der hohe Rechenaufwand, der zu einer zeitintensiven Bearbeitung führt.

4.2.2 Das ergänzende Datenmaterial zum Value-at-Risk

Die verschiedenen hier anzuwendenden Verfahren zur Berechnung des VaR der einzelnen Wertpapierpositionen sollen an vier verschiedenen Wertpapieren (DAX, Deutsche Bank, Münchner Rück und VW) mit einer Vermögensposition von je 1 Mio EUR durchgeführt werden. Als Datenbasis stehen wiederum die stündlichen Kursentwicklungen von 01.02.2008 bis zum 01.08.2008, mit 1150 Werten, zur Verfügung. Dieser Untersuchungszeitraum wird in eine Analyse- und eine Backtesting-Periode unterteilt. Die Analyse-Periode umfasst die ersten 650 1-Stunden-Werte. In diesem verkürzten Zeitraum soll die Varianz mit Hilfe der oben erwähnten Methode ermittelt und daraus der Value-at-Risk berechnet werden. Die Backtesting-Periode dient dazu, die so berechneten VaR-Werte den tatsächlichen Verlusten des Wertpapiers gegenüberzustellen; dafür werden die letzten 500 Zeitreihenwerte verwendet. Die Berechnung des Value-at-Risks für die einzelnen Wertpapierpositionen erfolgte durch die Verwendung der Statistik-Software EVIEWS 6 von Quantitative Micro Software (QMS).

4.2.3 Value-at-Risk Ermittlung auf Basis der historischen Simulation

4.2.3.1 Modelldarstellung der historischen Simulation

Das Modell der historischen Simulation zeichnet sich dadurch aus, dass keine Verteilungsannahme getroffen werden muss. Mit Hilfe der historischen Zeitreihe können die jeweiligen Marktpreisschwankungen und die empirische Verteilung der vergangenen Renditen ermittelt werden. Durch die so ermittelten Renditen erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Wertänderungen. Der VaR auf einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsniveau entspricht somit dem entsprechenden

Quantil des Verlustes der Finanzposition und wird direkt ermittelt. Für die historische Simulation (HS) wird ein rollendes Fenster von 650 Renditewerten für die Berechnung des Value-at-Risk verwendet. Die stündlichen VaR-Werte der historischen Simulation für ein α von 0.05 lassen sich wie folgt ermitteln:

$$VaR - HS(0.95) = r_{\alpha=0.05} \cdot V_t. \quad (4.4)$$

4.2.3.2 Schätzung und empirische Ergebnisse der historischen Simulation

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der stündlichen VaR-Berechnung auf Basis der historischen Simulation für das 99%-, 97.5%- und das 95%-Konfidenzintervall präsentiert. Um den VaR für einen Zeithorizont von einem Tag zu bestimmen, müssen die 1-Stunden VaR in einem zweiten Schritt hochgerechnet werden. Für die berechneten VaR-Werte geschieht dies durch die Hilfe des Wurzelgesetzes. Durch die Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{8}$ werden die stündlichen VaRs in die entsprechende Länge eines Handelstages transformiert. Die kurzfristigen 1-Stunden-VaRs und die 1-Tages VaRs für die hier geschätzten Wertpapierpositionen sind in der Tabelle 4.1 dargestellt. Aus Tabelle 4.1 ist deutlich zu erkennen, dass

Konfidenzniveau		HS	
		1 STD	1 Tag
DAX	95%	-0,491	-1,388
	97,5%	-0,652	-1,844
	99%	-0,801	-2,265
DBK	95%	-1,135	-3,213
	97,5%	-1,682	-4,572
	99%	-2,45	-6,929
MUV	95%	-0,695	-1,965
	97,5%	-0,922	-2,607
	99%	-1,198	-3,388
VOW	95%	-0,846	-2,393
	97,5%	-1,181	-3,341
	99%	-1,432	-4,044

Tabelle 4.1: 1-Std und 1-Tages-VaRs bei historischer Simulation

der VaR für die einzelnen Wertpapierpositionen mit steigenden Konfidenzniveau zunimmt. Dieses Ergebnis wird auch in den Ein-Tages-Prognosen widerspiegelt.

Zur Überprüfung, ob das Modell der historischen Simulation gute Ergebnisse liefert, schließt sich an die VaR-Schätzung eine Validierung der Ergebnisse an. Dies erfolgt durch die Verwendung des Backtesting-Verfahrens. Die Grundlage für dieses Verfahren bilden Vergleiche von historischen Prognosen mit den tatsächlich eingetretenen Verlusten der Wertpapierpositionen. Tabelle 4.2 zeigt die Anzahl der Überschreitungen für das Modell der historischen Simulation für die einzelnen Wertpapierpositionen bei dem jeweiligen Konfidenzniveau. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% werden etwa 25 Ausreißer erwartet. In fast allen untersuchten Zeitreihen zeigt die historische Simulation eine sehr gute Performance. Bei den beiden anderen Konfidenzniveaus wird dieses Ergebnis für die VaR-Werte bestätigt. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die VaR-Werte mit dem hier verwendeten Ansatz zu einem ordentlichen Ergebnis kommen und die Überschreitungen der Backtesting-Ergebnisse im Rahmen der Erwartungen sind.

VaR 1Std	DAX	DBK	MUV2	VW
		95%, erwartete Überschreitungen: 25		
HS	24	22	25	26
		97,5%, erwartete Überschreitungen: 13		
HS	12	15	13	15
		99%, erwartete Überschreitungen: 5		
HS	6	8	6	6

Tabelle 4.2: Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei historische Simulation

4.2.3.3 Kritische Würdigung der historischen Simulation

Problematisch ist bei diesem Ansatz die Wahl der Länge der berücksichtigten vergangenen Zeitperiode. Liegen momentan sehr große Marktschwankungen vor, wobei die Volatilität in der Vergangenheit aber eher gering ist, kommt es zu einer Unterschätzung des VaR. Die historische Simulation berücksichtigt nicht explizit die für Finanzmarktdaten beobachtete zeitveränderliche Volatilität, und kann somit die für Finanzmarktdaten typische dynamische Entwicklung, in welcher sich Perioden geringer und hoher Volatilität gegenseitig ablösen, nicht beachten. Dieses kann zu einer Fehlschätzung des Value-at-Risk führen. Dennoch ist die historische

Simulation der am häufigsten angewendete Ansatz zur Ermittlung des VaR in der Praxis.

4.2.4 Value-at-Risk Berechnung mit dem GARCH-Modell

Die parametrischen Ansätze verwenden meist zeitkonstante Schätzfunktionen für die Varianz. Da aber Finanzzeitreihen im allgemeinen heteroskedastisch sind, ist die Verwendung einer konstanten Varianz nicht optimal. Eine Möglichkeit der Schätzung von variierenden Varianzen der Renditen ist die Integration der GARCH-Schätzung in das Konzept des Value-at-Risks. Für die Risikomessung eines einzelnen Wertpapiers kann jedes der in Kapitel 3 beschriebenen GARCH-Modelle verwendet werden. Die am häufigsten anzutreffende Variante ist das GARCH(1,1)-Modell.¹⁰⁷ Das GARCH(1,1)-Modell zeigte eine gute Anpassung an die in dieser Arbeit untersuchten Daten.¹⁰⁸ Wird für die Renditen ein GARCH(1,1)-Modell angenommen, so berechnet sich der Value-at-Risk für den Tag h als:

$$VaR_h = c_\alpha \cdot \sigma_h \cdot V_t = c_\alpha \cdot \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2} \cdot V_t \quad (4.5)$$

Durch die Verwendung eines GARCH-Modells folgt ein sich im Zeitablauf veränderter prognostizierter Value-at-Risk. Somit wird dieses Risikomaß der aktuellen Varianzprognose angepaßt.

4.2.4.1 Schätzung und empirische Ergebnisse des GARCH-Modells

Im Folgenden werden die Ergebnisse der stündlichen VaR-Berechnung unter Berücksichtigung eines GARCH(1,1)-Modell für das 99%-, 97.5%- und das 95%-Konfidenzintervall dargestellt. Die Berechnung der Varianz erfolgt mit einem GARCH(1,1)-Modell, anhand dessen die Value-at-Risk-Werte ermittelt werden können. Um den VaR für einen Tag zu bestimmen, müssen die 1-Stunden VaR, analog zur historischen Simulation, hochgerechnet werden. Auch hier werden die stündlichen VaRs durch die Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{8}$ in 1-Tages VaRs umgerechnet. Die 1-Stunden-VaRs und die 1-Tages VaRs für die hier geschätzten

¹⁰⁷Vgl. Giot, P., Intraday, 2000, S. 9.

¹⁰⁸Vgl. Kapitel 3.2.3.

Wertpapierpositionen auf Basis des GARCH(1,1)-Modells können aus der Tabelle 4.3 entnommen werden. Aus Tabelle 4.3 wird sichtbar, dass der VaR für die einzelnen Wertpapierpositionen mit steigenden Konfidenzniveau zunimmt. Dieses Ergebnis wird in den Ein-Tages-Prognosen wiedergespiegelt.

Konfidenzniveau		GARCH	
		1 <i>STD</i>	1 <i>Tag</i>
DAX	95%	-0,551	-1,558
	97,5%	-0,657	-1,858
	99%	-0,781	-2,209
DBK	95%	-1,577	-4,463
	97,5%	-1,879	-5,317
	99%	-2,231	-6,312
MUV	95%	-0,832	-2,353
	97,5%	-0,991	-2,803
	99%	-1,176	-3,327
VOW	95%	-0,996	-2,818
	97,5%	-1,187	-3,357
	99%	-1,408	-3,985

Tabelle 4.3: 1-Std und 1-Tages-VaRs bei einem GARCH-Modell

Ob der Value-at Risk auf Basis eines GARCH-Modells adäquate Ergebnisse liefert, wird durch die Verwendung des Backtesting-Verfahrens überprüft. Tabelle 4.4 zeigt die Anzahl der Überschreitungen für den Value-at Risk auf Basis eines GARCH-Modells. Bei 500 Prognosen und $\alpha = 0,05$ sollten rechnerisch ca. 25 Backtesting-Überschreitungen resultieren. Starke Überschreitungen dieser Größe würden Schwächen des GARCH-Ansatzes zeigen.

VaR 1Std	DAX	DBK	MUV2	VW
		95%, erwartete Überschreitungen: 25		
GARCH	17	21	17	22
		97,5%, erwartete Überschreitungen: 13		
GARCH	14	15	13	15
		99%, erwartete Überschreitungen: 5		
GARCH	9	11	6	11

Tabelle 4.4: Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei einem GARCH-Modell

Bei einem Konfidenzniveau von 95% zeigt der GARCH-Ansatz für die vier untersuchten Zeitreihen eine sehr gute Performance, da die tatsächlichen Überschreitungen deutlich unter der erwarteten Anzahl von 25 sind. Bei dem Konfidenzniveau von 97,5% wird ein gutes Resultat erzielt, da die tatsächlichen Überschreitungen den Erwartungen entsprechen. Allerdings kann der Value-at-Risk auf Basis eines GARCH-Modells bei einem Konfidenzniveau von 99% nicht überzeugen, da hier zu oft der erwartete Wert übertreten wird. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die VaR-Werte mit dem GARCH Ansatz zu einem sehr guten Ergebnis für ein Konfidenzniveau von 95% und 97,5% kommen.

4.2.4.2 Kritische Würdigung des GARCH-Modells

Ein entscheidender Vorteil der GARCH-Modelle ist die Berücksichtigung der zeitveränderlichen Volatilität bei Finanzmarktdaten. Mit der Einbeziehung der GARCH-Modelle in die Value-at-Risk Berechnung kann die Genauigkeit der Abschätzung verbessert werden. Allerdings beruhen die GARCH-Modelle auf der Annahme einer bedingten Normalverteilung und können die für empirische Zeitreihen typische leptokurtische Verteilung nicht vollständig berücksichtigen.

4.2.5 Value-at-Risk Berechnung mit dem Modell des exponentiellen Glättens

4.2.5.1 Modelldarstellung der exponentiellen Glättung

Ein anderer Ansatz, um die Volatilität zu modellieren, ist das Modell des exponentiellen Glättens nach J.P.Morgan¹⁰⁹. Bei dieser Methode gehen vergangenheitsbezogene Beobachtungen exponentiell gewichtet in die Varianzgleichung ein. Das bedeutet, dass historische Werte, die noch nicht weit in der Vergangenheit zurückliegen, ein größeres Gewicht erhalten sollten als Beobachtungen, die vor sehr langer Zeit festgestellt wurden. Es wird also einerseits ein historisch weit zurückreichender (typischerweise 1 Jahr) und entsprechend umfangreicher Dateninput verwendet, andererseits aber auch berücksichtigt, dass wegen der offensichtlichen Schwankungen der Volatilitäten im Zeitablauf neuere Marktdaten eine größere Re-

¹⁰⁹Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996.

levanz als ältere Daten aufweisen, vergleichbar mit den GARCH-Modellen. Bei exponentieller Glättung reagiert das Modell zügig auf neue Marktbedingungen, d.h. es werden schon kurze Zeit etwa nach dem Eintritt in eine nervösere Marktphase höhere Value-at-Risk-Kennziffern ausgewiesen.

Bei Annahme eines Erwartungswertes der Renditen von Null, ergibt sich für die bedingte Varianz σ_t zum Zeitpunkt t :¹¹⁰

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-1-i}^2, \quad t = 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Diese Formel kann umgeformt werden zu:¹¹¹

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2. \quad (4.7)$$

Hierbei fungiert der Parameter λ als Glättungsparameter mit $0 < \lambda < 1$. Dieser Parameter bestimmt, wie stark die jeweiligen Beobachtungen aus der Vergangenheit gewichtet werden: Je größer λ , d.h. je näher an eins, desto größer ist das Gewicht bei den historischen Beobachtungen und desto geringer ist die Gewichtung bei der letzten Beobachtung. Die Summe aller Gewichte $(1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i$ ergibt eins, und die einzelnen Gewichte für die Beobachtungen fallen exponentiell ab. Der Glättungsparameter kann auf der Basis von historischen Daten geschätzt werden.¹¹² In der Regel wird ein einheitlicher Glättungsparameter verwendet. Alexander berichtet von praxisgerechten Werten für λ zwischen 0,75 und 0,98.¹¹³ In dem Risikomodell RiskMetrics werden unterschiedliche Glättungsfaktoren für die Tages- und Monatsdaten verwendet. Dabei werden täglichen Renditen mit $\lambda = 0,94$ und monatliche Renditen mit $\lambda = 0,97$ geglättet.¹¹⁴ Dadurch sind Tages- und Monatsprognosen für die bedingten Varianzen inkonsistent zueinander. Morgan betont, dass durch diese Modellwahl ein für die Praxisanwendung adäquater Kompromiß zwischen guter Handbarkeit und möglichst genauen Ergebnissen erreicht wird.¹¹⁵

¹¹⁰Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996, S. 78.

¹¹¹Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996, S. 82.

¹¹²Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996, S. 97ff.

¹¹³Vgl. Alexander, C. O., covariance, 1997, S. 50-62.

¹¹⁴Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996, S. 97.

¹¹⁵Vgl. Morgan, J.P., RiskMetrics, 1996, S. 97f.

Aus Gleichung 4.7 ist erkennbar, dass die exponentielle Glättung einem integrierten GARCH-Modell¹¹⁶ mit $\alpha_0 = 0$ entspricht. Dieser Modelltyp ist zwar stark, aber nicht schwach stationär und somit ist die unbedingte Varianz unendlich groß bzw. die unbedingte Varianz existiert nicht. Insbesondere zeigt er keinen langfristigen Mittelwert (Mean Reversion), die bedingte Varianz kehrt also nicht wieder zu ihrem langfristigen Mittelwert zurück. Der wesentliche Vorteil der exponentiellen Glättung liegt in der expliziten Modellierung der zeitvariablen Varianz (Volatilität). Die Value-at-Risk-Prognose passt sich schnell den Veränderungen der Marktverhältnisse an. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, dass der Glättungsparameter λ nicht geschätzt, sondern aufgrund von Erfahrungswerten festgelegt wird.

4.2.5.2 Schätzung und empirische Ergebnisse der exponentiellen Glättung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der stündlichen VaR-Berechnung mit Hilfe der exponentiellen Glättung für das 99%-, 97.5%- und das 95%-Konfidenzintervall präsentiert. Bei der Berechnung des Value-at-Risks wird die Varianz mit einem Glättungsparameter von $\lambda = 0,9$ berechnet. Auch bei dieser VaR-Variante werden die VaR-Werte für einen Tag durch die Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{8}$ bestimmt. Die kurzfristigen 1-Stunden-VaRs und die 1-Tages VaRs für die hier geschätzten Wertpapierpositionen sind in der Tabelle 4.5 dargestellt.

Aus Tabelle 4.5 ist deutlich zu erkennen, dass der VaR für die einzelnen Wertpapierpositionen mit steigenden Konfidenzniveau zunimmt. Ob das Modell der exponentiellen Glättung ansprechende Ergebnisse liefert, wird durch das Backtesting-Verfahrens ermittelt. Tabelle 4.6 zeigt die Anzahl der Überschreitungen für das Modell der exponentiellen Glättung für die einzelnen Wertpapierpositionen bei dem jeweiligen Konfidenzniveau. Bei einem Konfidenzniveau von 95% zeigt das Modell der exponentiellen Glättung für die in dieser Arbeit untersuchten Daten eine geteilte Performance. Für den DAX und VW liegen die tatsächlichen Überschreitungen deutlich unter der erwarteten Anzahl von 25. Dies trifft nicht auf die beiden anderen VaR-Werte zu. Bei dem Konfidenzniveau von 97,5% wird ein

¹¹⁶Vgl. Bollerslev, T.; Engle, R. F., persistence, 1986, S. 1-50.

Konfidenzniveau		<i>EG</i>	
		1 <i>STD</i>	1 <i>Tag</i>
<i>DAX</i>	95%	-0,539	-1,542
	97,5%	-0,643	-1,818
	99%	-0,763	-2,158
<i>DBK</i>	95%	-1,663	-4,704
	97,5%	-1,982	-5,604
	99%	-2,351	-6,651
<i>MUV</i>	95%	-0,788	-2,231
	97,5%	-0,939	-2,658
	99%	-1,115	-3,154
<i>VOW</i>	95%	-0,899	-2,545
	97,5%	-1,072	-3,032
	99%	-1,272	-3,599

Tabelle 4.5: 1-Std und 1-Tages-VaRs bei exponentieller Glättung

ansprechendes Resultat erzielt, da die tatsächlichen Überschreitungen im Rahmen sind. Der Value-at-Risk bei der exponentiellen Glättung kann bei einem Konfidenzniveau von 99% überzeugen, da hier der erwartete Wert zwar übertreten wird, sich jedoch die Überschreitungen in Grenzen halten. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die VaR-Werte bei der exponentiellen Glättung mit steigendem Konfidenzniveau gemessen an dem Ergebnis des Backtesting-Verfahrens bessere Ergebnisse liefern.

VaR 1Std	DAX	DBK	MUV2	VOW
		95%, erwartete Überschreitungen: 25		
EG	21	26	28	21
		97,5%, erwartete Überschreitungen: 13		
EG	15	16	16	13
		99%, erwartete Überschreitungen: 5		
EG	5	8	7	6

Tabelle 4.6: Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten bei exponentieller Glättung

4.2.5.3 Kritische Würdigung der exponentiellen Glättung

Der wesentliche Vorteil der exponentiellen Glättung liegt, wie beim GARCH-Modell, in der Modellierung der zeitvariierenden Volatilität. Somit passt sich die

VaR-Wert schnell den Veränderungen der Marktverhältnisse an. Ein Nachteil dieser Modellvariante ist jedoch, dass der Glättungsparameter λ nicht geschätzt, sondern festgelegt wird.

4.2.6 Zusammenfassung und Vergleich der empirischen Ergebnisse

In den Abbildungen 4.2 bis 4.5 werden die Value-at-Risk Berechnungen für die einzelnen Vermögenspositionen mit einer exponentiell geglätteten Varianz (EG) und mit einer GARCH-(1,1)-basierten Varianz gezeigt. Aus diesen vier Abbildungen ist deutlich erkennbar, wie das Value-at-Risk-Maß als Risikomaß auf die Phasen größerer und kleinerer Risiken der einzelnen Werte im stündlichen Zeitablauf reagiert. Außerdem ist ersichtlich, dass die VaR-Werte der beiden Methoden sich im Zeitverablauf das eine oder andere Mal schneiden. Trotzdem wird deutlich, dass die VaR-Werte, die durch die Methode des exponentiellen Glättens geschätzt wurden, weitgehend über den VaR-GARCH Werten liegen.

Dieser grafische Eindruck wird durch die ermittelten VaRs für verschiedene Konfidenzniveaus in Tabelle 4.7 bestätigt. Im Vergleich zur GARCH-Variante schneidet die EG-Methode, bis auf die Deutsche Bank-Werte, am schlechtesten für eine kurzfristige Ein-Stunden-Prognose ab. Dieses Ergebnis nimmt mit steigenden Konfidenzniveau zu und spiegelt sich auch in den Ein-Tages-Prognosen wider. Diese zunehmende Überschätzung ist dadurch zu erklären, dass die GARCH-Methode die Annahme der Normalverteilung besser als die EG-Methode verarbeitet und somit eine genauere Schätzung der Varianz erfolgt.

Der Vergleich von HS, EG und GARCH für den DAX-VaR zeigt für eine Wahrscheinlichkeit von 95%, dass die GARCH-Methode den betragsmäßig größten VaR hat. Bei einem Niveau von 97,5% ergeben sich nur geringe Unterschiede. Für den DAX ist der VaR der HS bei einem Niveau von 99% betragsmäßig höher als bei den beiden anderen Methoden. Dagegen zeigen die VaR-Werte für die Deutsche Bank ein anderes Bild. Hier liegen die VaR-Werte der HS betragsmäßig deutlich unter den beiden anderen Methoden bei einem Konfidenzniveau von 95 und 97,5%, wobei die EG-Werte diesmal über den GARCH-Werten liegen. Für das 99% Niveau

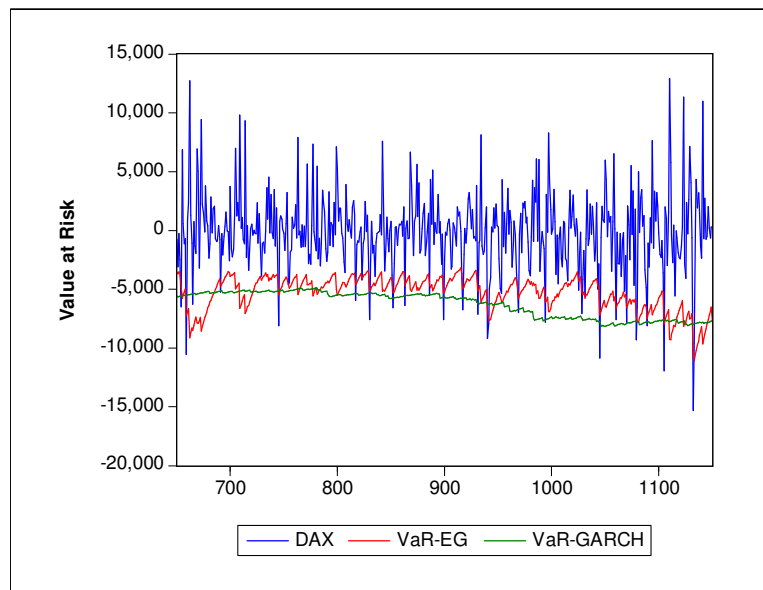


Abbildung 4.2: Vergleich des 95% Value-at-Risk für den DAX auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells

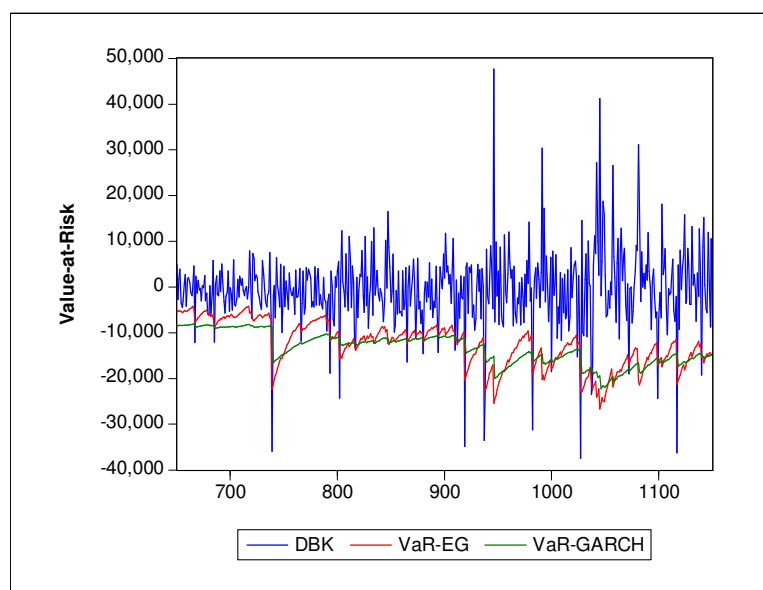


Abbildung 4.3: Vergleich des 95% Value-at-Risk für die Deutsche Bank auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells

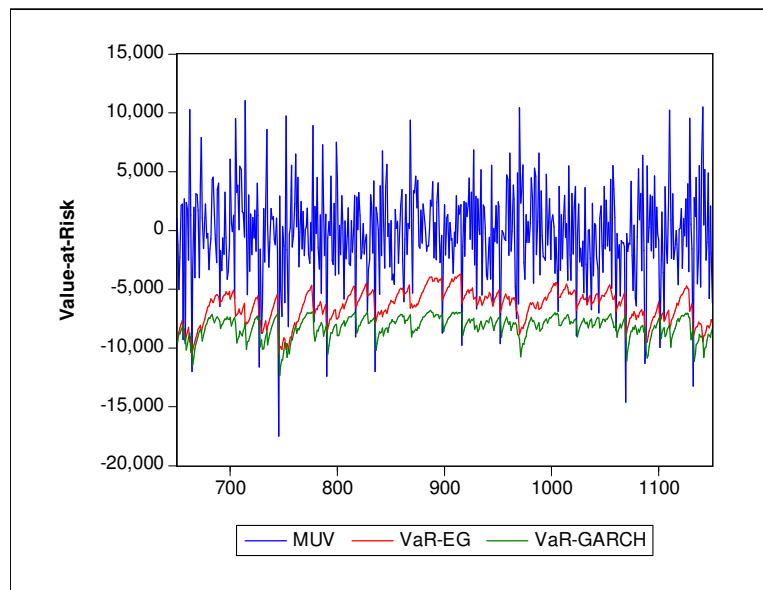


Abbildung 4.4: Vergleich des 95% Value-at-Risk für die Münchner Rückversicherung auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells

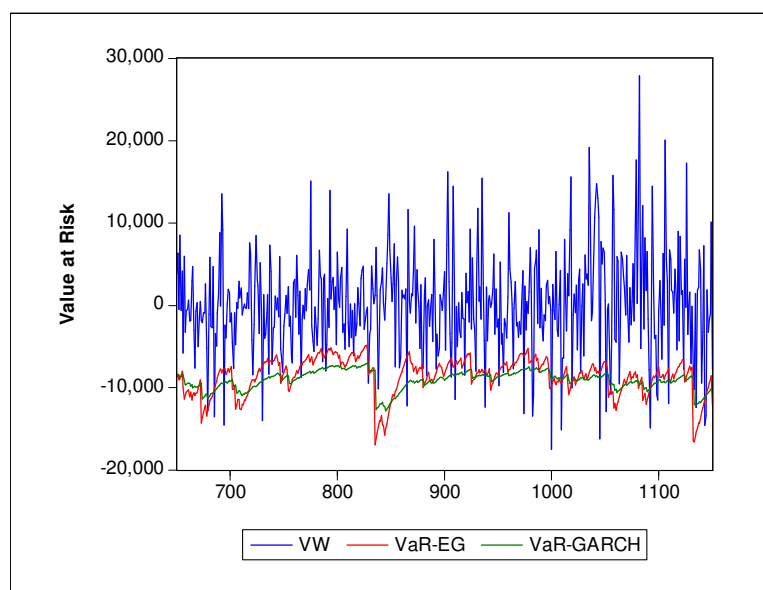


Abbildung 4.5: Vergleich des 95% Value-at-Risk für VW auf Basis der exponentiellen Glättung und des GARCH-Modells

zeigt die HS deutlich die größten Werte. Für die Münchner Rückversicherung ist der VaR der GARCH-Methode betragsmäßig deutlich größer als bei der HS und EG-Methode. Das mittels HS bestimmte 99%-Quantil ist größer als die Werte der anderen beiden Methoden. Der VaR Wert für VW ist bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% betragsmäßig deutlich höher bei der GARCH-Prognose als bei den anderen Methoden. Der Vergleich von HS und GARCH zeigt bei den Niveaus von 97,5 und 99% nur geringe Unterschiede, wobei die VaR-Werte der EG-Methode deutlich unter diesen liegen.

Konfidenzniveau		HS		EG		GARCH	
		1 <i>STD</i>	1 <i>Tag</i>	1 <i>STD</i>	1 <i>Tag</i>	1 <i>STD</i>	1 <i>Tag</i>
DAX	95%	-0,491	-1,388	-0,539	-1,542	-0,551	-1,558
	97,5%	-0,652	-1,844	-0,643	-1,818	-0,657	-1,858
	99%	-0,801	-2,265	-0,763	-2,158	-0,781	-2,209
DBK	95%	-1,135	-3,213	-1,663	-4,704	-1,577	-4,463
	97,5%	-1,682	-4,572	-1,982	-5,604	-1,879	-5,317
	99%	-2,45	-6,929	-2,351	-6,651	-2,231	-6,312
MUV	95%	-0,695	-1,965	-0,788	-2,231	-0,832	-2,353
	97,5%	-0,922	-2,607	-0,939	-2,658	-0,991	-2,803
	99%	-1,198	-3,388	-1,115	-3,154	-1,176	-3,327
VOW	95%	-0,846	-2,393	-0,899	-2,545	-0,996	-2,818
	97,5%	-1,181	-3,341	-1,072	-3,032	-1,187	-3,357
	99%	-1,432	-4,044	-1,272	-3,599	-1,408	-3,985

Tabelle 4.7: 1-Std und 1-Tages-VaRs für die vier Zeitreihen und für verschiedene Konfidenzniveaus

Die Value-at-Risk-Schätzung endet mit einer Validierung der Prognoseergebnisse. Zum Vergleich der in dieser Arbeit verwendeten Ansätze zur Berechnung des Value-at-Risks soll die Qualität der VaR-Prognosen herangezogen werden. Ob ein Modell adäquate Ergebnisse liefert, soll durch das Verfahren des Backtesting überprüft werden. Die Grundlage dafür bilden Vergleiche von den tatsächlich eingetroffenen Verlusten mit den Prognosen des entsprechenden Value-at-Risk-Modells. In den Abbildungen 4.2 bis 4.5 werden die Überschreitungen durch diejenigen Balken dargestellt, die die VaR-Werte (VaR-EG und VaR-GARCH) durchbrechen.

Tabelle 4.8 zeigt die Anzahl der erwarteten und tatsächlichen Überschreitungen für die vier Zeitreihen bei dem jeweiligen Konfidenzniveau. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% werden etwa 25 Ausreißer erwartet. In fast allen untersuchten

VaR 1Std	DAX	DBK	MUV2	VW
		95%, erwartete Überschreitungen: 25		
HS	24	22	25	26
EG	21	26	28	21
GARCH	17	21	17	22
		97,5%, erwartete Überschreitungen: 13		
HS	12	15	13	15
EG	15	16	16	13
GARCH	14	15	13	15
		99%, erwartete Überschreitungen: 5		
HS	6	8	6	6
EG	5	8	7	6
GARCH	9	11	6	11

Tabelle 4.8: Anzahl der Überschreitungen bei den VaR-Werten der vier Zeitreihen für die Backtesting-Periode

Zeitreihen ist die GARCH-Prognose bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% den anderen beiden Methoden überlegen und zeigt somit die beste Performance. Lediglich für zwei Zeitreihen bei der Berechnung des VaR mittels EG übersteigt die Anzahl der Überschreitungen das erlaubte Maß von 25. Bei einem Konfidenzniveau von 97,5% ergibt sich ein geteiltes Bild für das Backtesting-Ergebnis, da kein Verfahren eindeutig dominiert. Das kann dadurch erklärt werden, dass die Ausreißer bei den drei Methoden sehr eng zusammen liegen und alle Methoden die Anzahl der erwarteten Überschreitungen zwei bis dreimal übertreten. Die HS-Methode ist der GARCH-Variante bei einem Niveau von 99% bei allen Zeitreihen überlegen. Ein so eindeutiges Ergebnis gibt es im Vergleich mit der EG-Methode nicht. Bei diesem Wahrscheinlichkeitsniveau zeigt die HS-Methode nur für zwei Zeitreihen ein besseres Ergebnis, obwohl die Fehlprognosen sehr nah beieinander liegen.

4.3 Betafaktor als Risikomaß

Der Betafaktor dient als das Maß für das Marktrisiko eines Wertpapiers. Die Formel für den Betafaktor für Aktien ist wie folgt definiert:

$$\beta_i = \rho_{i,m} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}. \quad (4.8)$$

Dabei stellt $\rho_{i,m}$ den Korrelationskoeffizienten zwischen der Aktie und dem Index dar. Die Standardabweichung der Aktie ist mit σ_i bezeichnet und die Standardabweichung des Indexes mit σ_m .

Im Folgenden werden die finanzierungstheoretische Grundlagen für die Bestimmung des Betafaktors vorgestellt. Im Anschluß erfolgt eine Schätzung des Betafaktors für ausgewählte Aktien aus dem Deutschen Aktien Index (DAX), indem verschiedene Modellspezifikationen zum Einsatz kommen. Anschließend werden die Ergebnisse für diese Aktien miteinander verglichen, und es wird eine abschließende Beurteilung der vorgenommenen Modellschätzungen durchgeführt.

4.3.1 Der Betafaktor und seine finanzierungstheoretische Grundlagen

Der Betafaktor stellt in den auf dem Capital-Asset-Pricing-Modell (CAPM) aufbauenden finanzwirtschaftlichen Theorien die Kennzahl für das mit einer Investitions- oder Finanzierungsmaßnahme übernommene systematische Risiko (Marktrisiko) dar. Vor der hier vorzunehmenden empirischen Untersuchung zum Betafaktor sollen kurz dessen finanzierungstheoretischen Grundlagen, beginnend mit der Portfolio Selektion, dem Single-Index-Modell, dem CAPM-Modell und dem Markt-Modell vorgestellt werden.

4.3.1.1 Grundlagen und Eigenschaften der Portfolio Selektion

Der Kerngedanke der Portfolio Selektion besteht darin, dass ein Investor das Gesamtrisiko, beschrieben durch die Standardabweichung (σ_P) eines Portfolios, unter die Einzelrisiken der enthaltenen Aktien, durch geeignete Zusammenstellung verringern kann. Dieser sogenannte Diversifikationseffekt beruht auf der Korrelation der Renditen der verschiedenen Aktien. Die Korrelation zwischen den Renditen wird durch die Kovarianzen oder Korrelationskoeffizienten beschrieben.

Im Rahmen der Portfolio Selektion entwickelte Markowitz ein Entscheidungsmodell, das zum einen alle Handlungsalternativen beinhaltet und zum anderen die Zielvorstellungen der Handelnden berücksichtigt. Der Prozess der Portfolio

Selektion kann in zwei Schritte untergliedert werden, zunächst die Aufstellung aller Handlungsalternativen unter Berücksichtigung der Anlageziele und anschließend die Bestimmung des individuellen optimalen Portfolios nach einem rationalen Entscheidungsprinzip. Beobachtungen des Anlegerverhaltens lassen den Schluß zu, dass zu den Anlagezielen der Investoren in erster Linie das Ertragsstreben und die Risikovermeidung zu zählen sind.¹¹⁷ Bei der Ermittlung des optimalen Portfolios legt Markowitz einen risikoaversen Anleger zugrunde.¹¹⁸ Ein Anleger wird daher aus der Menge der realisierbaren Portfolios dasjenige auswählen, dass

- bei gegebenem Ertrag das niedrigste Risiko oder
- bei gegebenem Risiko den höchsten Ertrag von allen zulässigen Assetkombinationen erwarten läßt.¹¹⁹

Gemäß seiner Präferenzen wird ein Anleger sich für das Portfolio entscheiden, das für ihn einen maximalen Nutzen hat. Die Zuordnung seines Nutzens zu Ertrag und Risiko setzt wiederum die sinnvolle Kombination beider Größen in einer gemeinsamen Zielfunktion voraus. Dafür ist es notwendig, Maßgrößen für den Ertrag und das Risiko zu finden, um sie dann in einer Zielfunktion zu verknüpfen. Der Ertrag (die zukünftige Rendite) wird durch den Erwartungswert μ ausgedrückt, und als Maß für das Risiko wird die Varianz σ^2 bzw. die Standardabweichung σ der Verteilung der zukünftigen Rendite verwendet.

Effiziente Portfolios Die Portfolio Selektion nach Markowitz hat einen Planungshorizont von zwei Zeitpunkten: zum Zeitpunkt t_0 werden Wertpapiere gekauft und zum künftigen Zeitpunkt t_1 verkauft. In diesem Modell existiert ein vollkommener Kapitalmarkt ohne Inflation, wobei von Steuern und Transaktionskosten abstrahiert wird. Für den gewählten Planungszeitraum sollen der Erwartungswert der Rendite möglichst groß und dabei die Schwankungen möglichst gering angesetzt werden. Markowitz sieht den Ertrag aus einer Aktienanlage als Zufallsvariable, die stärker oder schwächer schwanken kann, und nimmt vereinfachend an,

¹¹⁷Vgl. Hielscher, U., Investmentanalyse, 1996, S. 50-53.

¹¹⁸Vgl. Markowitz, H. M., Portfolio, 1959, S. 6.

¹¹⁹Vgl. Hielscher, U., Investmentanalyse, 1996, S. 61.

dass die Erträge normalverteilt sind.¹²⁰ In diesem Fall wird die Verteilung durch die ersten beiden Momente Erwartungswert und Varianz beschrieben. Die Rendite r_i einer Aktie i errechnet sich durch die Differenz des Endbetrags $K_{i,t}$ (Preis inklusive aller vereinnahmter und reinvestierter Dividenden) und den Anfangsbetrag K_0 bezogen auf $K_{i,0}$:

$$r_i = \frac{K_{i,t} - K_{i,0}}{K_{i,0}}. \quad (4.9)$$

Die erwartete Rendite $E(r_i)$ einer Aktie ergibt sich aus der Summe der n mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten p_{ij} gewichteten einzelnen Renditeschätzungen r_{ij} :

$$E(r_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} r_{ij}. \quad (4.10)$$

Als Maß für die Abweichung vom Erwartungswert wird die Standardabweichung oder die Varianz verwendet, da sie bei normalverteilten Renditen die Informationen über die Streuung um den Erwartungswert vollständig abbildet. Je breiter die Streuung der Rendite um ihren Erwartungswert ist, desto höher ist das Risiko, dass die erwartete Rendite nicht mindestens erreicht wird. Die Varianz σ_i^2 der Aktie ist definiert als:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[(r_i - E(r_i))^2] \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} (r_{ij} - E(r_i))^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für die dazugehörige Standardabweichung σ_i gilt:

$$\sigma_i = \sqrt{E(r_i - E(r_i))^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_{ij} (r_{ij} - E(r_i))^2}. \quad (4.12)$$

Die Kovarianz $Cov(r_i, r_j)$ zwischen den Renditen r_i und r_j der Aktien i und j wird wie folgt beschrieben:

¹²⁰Vgl. Markowitz, H. M., Portfolio, 1952, S. 77ff.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(r_i, r_j) &= \sigma_{ij} = E(r_i - E(r_i))(r_j - E(r_j)) \\
&= \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j.
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

Ein Portfolio wird charakterisiert durch die in ihm enthaltenen Aktien. Da die Renditen der einzelnen Aktien als Zufallsvariablen aufzufassen sind, ist auch die Portfoliorendite eine Zufallsvariable. Mit x_i ($1, \dots, n$) wird im folgenden der wertmäßige Anteil des Wertpapiers i am Portfolio bezeichnet. Die Rendite eines Portfolios r_p ergibt sich als gewogener Durchschnitt der Renditen der einzelnen Aktien. Es gilt:

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i. \tag{4.14}$$

Für den Erwartungswert der Portfoliorendite folgt:

$$E(r_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i. \tag{4.15}$$

Für die Varianz σ_p^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[(r_p - E(r_p))^2] \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}.
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Auf die Portfoliovarianz wirken somit drei Einflußfaktoren:

1. die Volatilität der einzelnen Aktien,
2. die Anteile x_i am Portfolio und
3. die Kovarianzen zwischen den Aktien

Die Varianz des Portfolios entspricht nicht der gewichteten Summe der Einzelvarianzen der Aktien. Von Bedeutung sind die Kovarianzen der Aktien, da die Portfoliovarianz nicht nur von der Streuung der einzelnen Aktien abhängt, sondern

von der Korrelation der einzelnen Aktien untereinander. Da die Kursentwicklungen der im Portfolio enthaltenen Aktien i.d.R. nicht vollständig positiv miteinander korreliert sind, kann durch eine breite Mischung von Aktien ein Diversifikationseffekt erreicht werden. Eine Veranschaulichung der Bedeutung der Richtung und der Stärke des Korrelationskoeffizienten für die Risikoreduktion in einem Portfolio, wird nachfolgend für den Zwei-Aktien-Fall dargestellt.

Die grafische Darstellung hierzu erfolgt in Abbildung 4.6. Dabei ist aus dem Diagramm zu erkennen, dass die Aktie A im Vergleich zur Aktie B eine niedrigere Renditeerwartung ($\mu_A < \mu_B$) bei einem geringeren Risiko ($\sigma_A < \sigma_B$) besitzt.

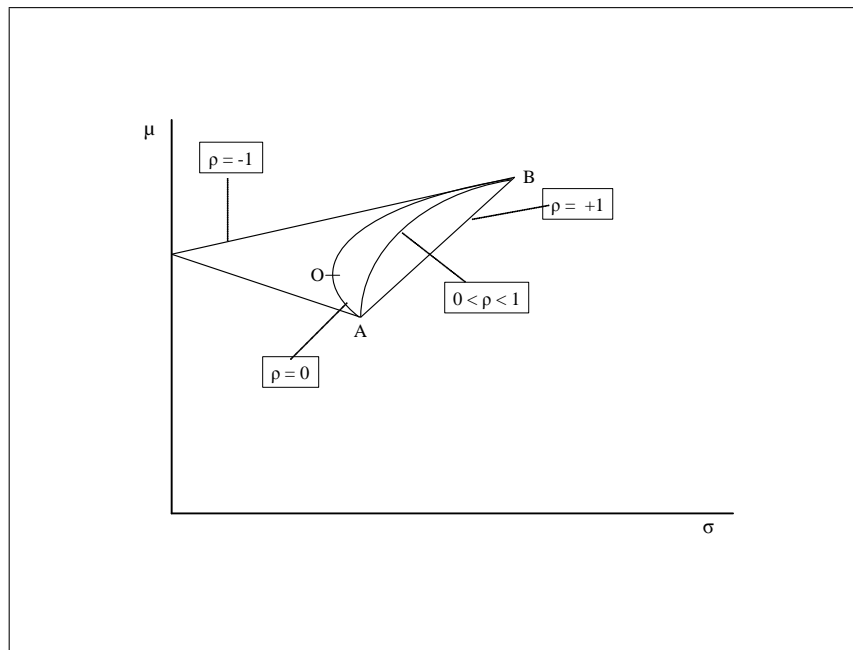


Abbildung 4.6: Linie der möglichen Portfolios aus zwei Aktien A und B

Innerhalb des Diagramms der Abbildung 4.6 können nun alle realisierbaren Kombinationen dieser zwei Aktien betrachtet werden. Die Menge aller möglichen Portfolios aus den beiden Aktien bildet dann im $\mu - \sigma$ -Diagramm eine Linie AB aus. Die Krümmung dieser Linie ist abhängig von der Korrelation der Renditen der Aktien A und B . Im Falle einer vollständig positiven Korrelation ($\rho_{A,B} = 1$) der beiden Renditen liegen die möglichen Portfolios auf einer Geraden AB . Dies

ist der einzige Fall, in dem kein Diversifikationseffekt erzielt werden kann. Das Gesamtrisiko der Portfolios kann in keinem Fall unter das Einzelrisiko der Aktien sinken. Die Portfoliorendite als auch das Risiko sind eine einfache Linearkombination der mit den Portfolioanteilen x_i gewichteten Einzelrenditen bzw. -risiken. Sobald die Korrelation der Aktienrenditen kleiner eins ist, liegen alle realisierbaren Portfolios auf einer konvex gekrümmten Linie. Im Idealfall der vollständigen negativen Korrelation ($\rho_{A,B} = -1$), d.h. die Renditen der beiden Aktien bewegen sich vollkommen entgegengesetzt, fällt das Risiko des Portfolios, ausgedrückt durch die Standardabweichung, auf Null. Durch den Diversifikationseffekt kann das Gesamtrisiko des Portfolios gesenkt werden. Es kann jedoch nicht von einer vollständig negativen Korrelation ausgegangen werden, so dass das Portfolio nicht zu einem sicheren Ertrag kommt. Der in der Realität am häufigsten anzutreffende Fall dürfte eine Korrelation $\rho_{A,B} > -1$ sein. In der Abbildung 4.1 besitzt das varianzminimale Portfolio O ein geringeres Risiko als die Aktie mit dem geringsten Einzelrisiko A . Die Menge aller risikoeffizienten Portfolios liegt auf der Verbindungslinie OB (Effizienzlinie). Sämtliche Portfoliokombinationen der Aktien A und B , die auf OA liegen, weisen bei dem gleichen Risiko eine geringere Renditeerwartung als die sich auf OG befindlichen Portfolios auf.

Diese Darstellung kann auf den n -Aktienfall erweitert werden. Die folgende Abbildung 4.7 zeigt die Menge der möglichen Portfolios im $\mu - \sigma$ -Raum, in welcher sowohl alle einzelnen Aktien als auch alle möglichen Portfoliokombinationen enthalten sind. Die Menge aller möglichen Portfolios bildet in diesem $\mu - \sigma$ -Raum eine Fläche. Hierbei kennzeichnet der Punkt A diejenige Kombination mit dem geringsten Risiko (Globales varianzminimales Portfolio). Punkt B stellt das Portfolio mit der höchsten erwarteten Rendite dar. Legt man um diese Fläche eine Hüllkurve, so liegen alle effizienten Portfolios auf dem Teil dieser Hüllkurve, die eine positive Steigung (Linie AB) besitzt und die Steigung nach unten begrenzt. Für die Berechnung der effizienten Portfolios entwickelte Markowitz einen Algorithmus, auf den an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll.¹²¹

Nachdem die effizienten Portfolios bestimmt worden sind, erfolgt in einem zweiten Schritt die Bestimmung des optimalen Portfolios. Welches Portfolio als optimal

¹²¹Vgl. Markowitz, H. M., Portfolio, 1959, S. 170ff.

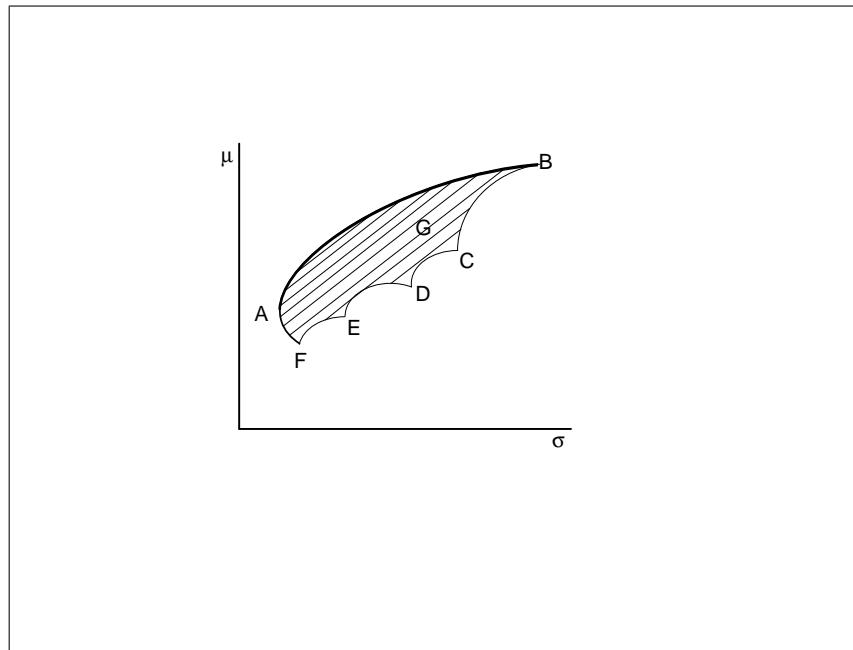


Abbildung 4.7: Mögliche Portfolios

gesehen wird, hängt nach Markowitz von der Präferenzstruktur des Anlegers hinsichtlich seiner Renditeerwartung und seiner Risikoneigung ab. Die Lösung des Modells ist ein quadratisches Optimierungsproblem, da diejenige Portfoliokombination gefunden werden soll, bei der der Nutzenerwartungswert ein Maximum annimmt.¹²² Ein rational handelnder Anleger wird nun nach den Prämissen des Modells das Portfolio auswählen, das gemessen an der erwarteten Rendite und dem Risiko seine individuellen Ziele bestmöglich realisiert. Der risikoscheue Anleger wird aus den effizienten Portfolios dasjenige wählen, welches das geringste zu erwartende Risiko aufweist. Ein Investor, der ein höheres Risikoniveau akzeptiert, wird sich für das Portfolio entscheiden, das den subjektiv höchsten zu erwartenden Ertrag verspricht.¹²³ Tobin erweiterte diesen Ansatz, indem er risikolose Anlage- und Kreditbeschaffungsmöglichkeiten mit in die Analyse einbezog.¹²⁴

¹²²Vgl. Markowitz, H. M., Portfolio, 1959, S. 286.

¹²³Vgl. Tobin, J., Theory, 1965, S. 47ff.

¹²⁴Vgl. Tobin, J., Liquidity, 1958, S. 82-86.

Beurteilung der Portfolio Selektion Die hier gezeigten Grundgedanken der Portfolio-Selektion bilden die Basis der modernen Kapitalmarkttheorie.¹²⁵ In ihren Grundzügen konnten die im Modell zur Wertpapierauswahl von Markowitz postulierten Zusammenhänge weitgehend empirisch bestätigt werden. Das gilt insbesondere für die Rendite-Risiko-Relation und den Diversifikationseffekt.¹²⁶ Durch diese Modellformulierung konnten zahlreiche theoretische und praktische Schwierigkeiten gelöst werden, trotzdem sind Portfolio-Selektion-Modelle in der Form von Markowitz selbst heute noch relativ selten in der Praxis vorzufinden.¹²⁷ Zu den größten Erschwernissen bei der praktischen Anwendung zählten noch in den fünfzigern und sechzigern Jahren die geringe Verfügbarkeit von empirischen Daten und die geringe Rechenleistung von Computern. Insbesondere zur Zeit seiner Einführung in den fünfzigern Jahren des vergangenen Jahrhunderts war der Rechenaufwand des Portfolio-Selektion-Modells nur schwer zu bewältigen. Für die Bestimmung der effizienten Portfolios werden die charakteristischen Größen wie der Erwartungswert, die Varianz und die Kovarianz benötigt. So sind bei einer Anzahl von N Aktien insgesamt $0.5 * N * (N - 1)$ Kovarianzen zu bestimmen, was beispielsweise bei einer Analyse von 100 Aktien zu einer Berechnung von 4950 Kovarianzen führen würde. Aus diesem Grund dürfte die praktische Anwendbarkeit allenfalls institutionellen Anlegern möglich sein.¹²⁸

Eine erhebliche rechentechnische Vereinfachung brachten die Index-Modelle, die Anfang der sechziger Jahre von Sharpe eingeführt wurden.¹²⁹ Diese beziehen sich im wesentlichen auf eine Reduzierung der Menge und vereinfachen so die Ermittlung der benötigten Schätzwerte für die erwarteten Renditen und deren Varianzen. Die grundlegenden Konzepte werden im folgenden kurz skizziert.

¹²⁵Vgl. Jensen, M. C., Capital Markets, 1972, S. 358.

¹²⁶Vgl. Steiner, P.; Uhler, H., Wertpapieranalyse, 2001, S. 135-142.

¹²⁷Vgl. Jorion, P., Portfolio Optimization, 1992, S. 68-74.

¹²⁸Vgl. Markowitz, H. M., Portfolio, 1991, S. 205.

¹²⁹Vgl. Sharpe, W. F., Model, 1963, S. 277ff. Die Grundidee zur Vereinfachung des Verfahrens durch einen Index findet sich schon bei Markowitz, H. M., Portfolio, 1959, S. 96-97.

4.3.1.2 Grundlagen und Eigenschaften des Single-Index Modells

Der gedankliche Ausgangspunkt liegt darin, dass die Notwendigkeit der Vereinfachung des Portfolio-Selektions-Modells gesehen wird.¹³⁰ Da ein großer Schätzaufwand im Markowitz'schen Modell notwendig ist, geht Sharpe von einer linearen Bindung eines jeden Wertpapiers i an einen bestimmten, zugrundeliegenden (Markt-)Index I aus.¹³¹ Formal lautet das Modell:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i I_M + \varepsilon_i. \quad (4.17)$$

Die Rendite einer Aktie r_i hängt von einer Komponente $(\alpha_i + \varepsilon_i)$ ab, die unabhängig von der Marktentwicklung ist und als unsystematische Komponente bezeichnet wird. Der Parameter α_i kennzeichnet den Abschnitt, an dem die Regressionsgerade die Ordinate schneidet ($I_M = 0$) und ist unabhängig von den Schwankungen des Indexes. Die Störgröße ε_i gibt die zufälligen Abweichungen der Rendite an. Desweiteren ist die Rendite von der Entwicklung des Faktors I_M und dem Parameter β_i abhängig, der die Sensitivität des Einzelwertes auf Veränderungen des Faktors I_M angibt und als systematische Komponente verstanden wird. Der Index I_M und die Störvariable ε_i werden als Zufallsvariable aufgefaßt. Sie haben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einem Erwartungswert und einer Varianz. Eine zentrale Annahme des Index-Modells ist, dass die Störvariablen ε unterschiedlicher Aktien nicht korreliert sind, also $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ gilt, und die Residuen einer Aktie i mit der Rendite der Marktportfolios mit $cov(\varepsilon_{I_M}, \varepsilon_i) = 0$ ebenfalls unkorreliert sind. Das impliziert, dass der einzige Grund einer gemeinsamen Veränderung von einzelnen Wertpapieren nur aufgrund ihrer gemeinsamen Veränderung mit dem Index zu sehen ist. Aus diesem Grund wird dieses Modell von Sharpe auch Diagonalmodell genannt, da die Varianz-Kovarianzmatrix der Störgrößen als Diagonalmatrix modelliert wird. Berücksichtigt man die weiteren Prämissen des Modells, so sind die für den Portfolio-Selektions-Prozess benötigten Werte auf einfache Weise

¹³⁰Vgl. Sharpe, W. F., Model, 1963, S. 277f.

¹³¹Vgl. Sharpe, W. F., Model, 1963, S. 281.

bestimmbar:¹³²

$$\text{Erwartungswert der Aktienrendite : } E(r_i) = \alpha_i + \beta_i * E(I_M) \quad (4.18)$$

$$\text{Varianz der erwarteten Rendite : } \sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (4.19)$$

$$\text{Kovarianzen zwischen den Wertpapierrenditen : } \sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \quad (4.20)$$

Beurteilung des Single-Index Modells Das Single-Indexmodell von Sharpe leistet einen entscheidenden Beitrag zur Überwindung einer Schwäche des Portfolio-Selektion-Modells von Markowitz. Die erhebliche rechentechnische Vereinfachung gegenüber dem Portfolio-Selektion-Modell liegt in der impliziten Schätzung der Kovarianzstruktur mit Hilfe der linearen Regression der Aktienrendite gegen den Index. Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu bestimmenden Parameter im N Aktienfall auf $3n + 2$. Für das Beispiel der Portfolioselektion mit 100 Aktien sind anstelle der 4950 erforderlichen Parameter nur noch 302 Daten zu ermitteln, nämlich für die einhundert Aktien jeweils $\alpha_i, \beta_i, \sigma_{\varepsilon_i}^2$ sowie für den Index $E(I_M)$ und σ_M^2 . Allerdings darf nicht außer Acht gelassen werden, dass diese Vereinfachungen im Vergleich zum Modell von Markowitz nur approximative Lösungen liefern. Insofern ist diese Informationsungenauigkeit der Preis für den deutlich reduzierten Aufwand. Um einerseits die Vereinfachung des Index-Modells zu nutzen, ohne andererseits auf die Wirklichkeitstreue des Portfolio-Selektions-Modells zu verzichten, entwickelte man sogenannte Multi-Index-Modelle, die eine Synthese von den beiden Konzepten darstellen.¹³³ Dabei werden neben der Berücksichtigung von Beziehungen zwischen Aktien und globalem Index auch die Korrelationen mit Klassen- und Branchenindizes untersucht.¹³⁴

¹³²Weitere Annahmen des Modells sind (1) die Störvariable ε_i hat den Erwartungswert $E(\varepsilon_i) = 0$ und (2) die Varianz $Var(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon_i}^2$. Darüber hinaus ist (3) die Varianz des Index definiert als $Var(I_M) = \sigma_M^2$. Elton, E. J.; Gruber, M. J., Portfolio Theory, 1991, S. 101-103.

¹³³Auf diese Multi-Index-Modelle soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden.

¹³⁴Vgl. Elton, E. J.; Gruber, M.J.; Padberg, M. W., Criteria, 1979, S. 7ff.

4.3.1.3 Grundlagen und Eigenschaften des CAPM-Modells

Das Capital-Asset-Pricing-Modell (CAPM) wurde in den 1960er Jahren unabhängig und annähernd zeitgleich von Sharpe, Lintner und Mossin entwickelt.¹³⁵ Es ist das klassische Gleichgewichtsmodell für die Bewertung von risikobehafteten Wertpapieren. Als Grundlage des CAPM-Modells dienen die Voraussetzungen des Portfolio-Selektions-Modells, also:

- Alle Investoren bewerten Portfolios nach dem (μ, σ) -Prinzip und betrachten den gleichen einperiodigen Planungshorizont.
- Die Anleger maximieren den Erwartungsnutzen.
- Die Investoren verhalten sich risikoavers bezüglich der Zusammensetzung ihres Aktienportfolios.
- Die Anlagetitel sind vollkommen marktfähig und beliebig teilbar, und der Markt ist friktionslos, d.h. von Steuern und Transaktionskosten wird abgesehen.

Darüber hinaus sind für die Ableitung des CAPM einige zusätzliche Prämissen erforderlich:

- Es existiert eine sichere Anlageform, zu diesem risikolosen Zinssatz können alle Investoren unbegrenzt Kapital anlegen und aufnehmen.
- Alle Informationen sind den Investoren gleichermaßen zugänglich und stehen ihnen kostenfrei zur Verfügung.
- Alle Anleger haben homogene Erwartungen, d. h. die Investoren gehen bei ihren Entscheidungen von identischen Erwartungen bezüglich der Rendite, den Varianzen und den Kovarianzen aus.

¹³⁵Vgl. Sharpe, W.F., Capital Asset Prices, 1964, S. 425ff.; Lintner, J., Security Prices, 1965, S. 587ff.; Mossin, J., Equilibrium, 1966, S. 468ff.

In den folgenden Ausführungen werden die zentralen Konzepte des CAPMs erläutert. In der Abbildung 4.8 sind der Verlauf der Kapitalmarkt- als auch der Wertpapierlinie grafisch dargestellt. Dabei wird in der linken Hälfte der Grafik die Kapitalmarktlinie gezeigt, die eine lineare Beziehung zwischen der Rendite und dem Risiko eines Portfolios aus risikolosen und risikobehafteten Anlagemöglichkeiten beschreibt. In der rechten Hälfte ist die Wertpapierlinie abgebildet. Diese beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der Rendite eines Wertpapiers und dessen Sensitivität gegenüber dem Marktportfolio.

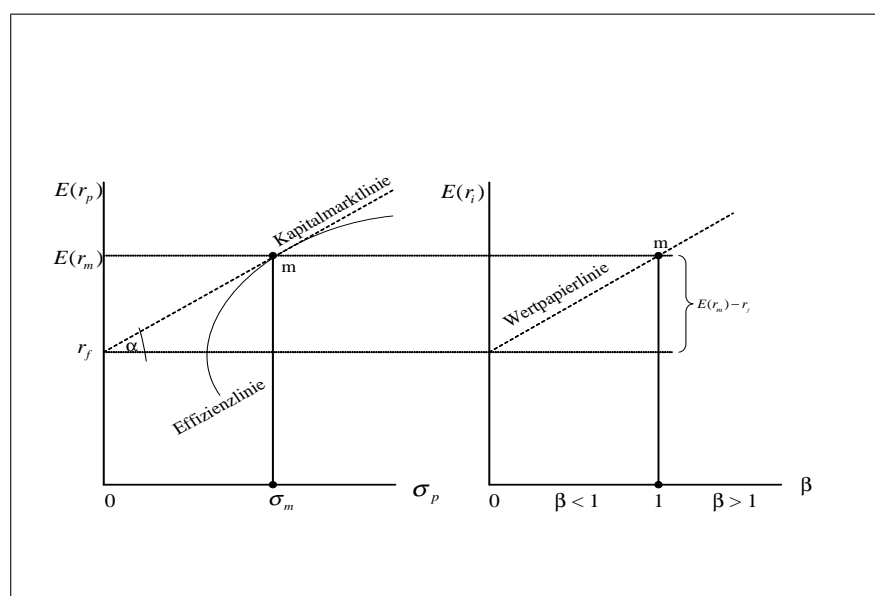


Abbildung 4.8: Kapitalmarktlinie und Wertpapierlinie im CAPM

Kapitalmarktlinie Nach Einführung der risikolosen Anlagemöglichkeit wird die ursprüngliche effiziente Kurve durch eine neue Effizienzgerade (Kapitalmarktlinie) dominiert und besitzt mit dieser einen Tangentialpunkt. Die Portfolios auf der Kapitalmarktlinie bestehen aus einer Anlage in risikobehafteten Wertpapieren und einer sicheren Anlage oder Verschuldung. Alle Investoren werden eine ihren Risikonutzenpräferenzen entsprechende Kombination aus dem riskanten Marktportfolio und der risikolosen Anlage wählen. Wie sich aus der Abbildung 4.3 ergibt, stellt

der risikolose Zinssatz r_f den Achsenabschnitt der Geraden dar. Die Steigung der Geraden entspricht dem Rendite-Risiko-Verhältnis $[E(r_m) - r_f] / \sigma_m$ des tangierten Portfolios m auf der Effizienzlinie. Dieses Verhältnis wird auch als Marktpreis des Risikos bezeichnet.¹³⁶ Die Struktur des risikobehafteten Portfolioanteils für jeden Punkt auf der Kapitalmarktklinie wird somit durch das Tangentialportfolio m beschrieben. Dieses entspricht dem Marktportfolio und repräsentiert eine wertgewichtete Anlage in allen handelbaren und nichthandelbaren Vermögensgegenständen.¹³⁷ Somit bildet die Kapitalmarktklinie die Menge aller effizienten Portfoliokombinationen im CAPM und läßt sich formal durch folgende Gleichung beschreiben:

$$E(r_p) = r_f + \left(\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_m} \right) \sigma_p. \quad (4.21)$$

Die erwartete Rendite eines effizienten Portfolios hängt demnach ab vom risikolosen Zinssatz und dem Produkt aus Portfoliorisiko und dem Marktpreis des Risikos.

Wertpapiermarktkline Die primäre Zielsetzung des CAPMs liegt jedoch in der Ermittlung einer risikoadäquaten Bewertung für ein einzelnes Wertpapier im Kapitalmarktgleichgewicht. In einer anschaulichen Herleitung für einzelne Wertpapiere geht Sharpe¹³⁸ von einem Investor aus, dessen Portfolio p aus x_i Anteilen einer beliebigen Aktie i und aus $(1 - x_i)$ Anteilen des Marktportfolios m besteht. Die Rendite und die Standardabweichung (Risiko) des Portfolios p entsprechen dann:

$$E(r_p) = x_i E(r_i) + (1 - x_i) E(r_m) \quad (4.22)$$

$$\sigma_p = \left(x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{im} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

Wegen der Kovarianzeigenschaft werden alle Kombinationen zwischen der Aktie und dem Marktportfolio im Rendite-Risiko-Diagramm auf einer konkaven Linie zwischen den Punkten m und p liegen, wobei die erwartete Rendite und die Standardabweichung unter anderem vom Anteil x_i abhängen. Durch Bildung der

¹³⁶Vgl. Elton, E.; Gruber, M., Portfolio Theory, 1991, S. 287.

¹³⁷Vgl. Fama, E.; MacBeth, J.D., Risk, 1973, S. 611, beschreiben das Marktportfolio als gewichteten Index aller Assets.

¹³⁸Die Ausführungen folgen Sharpe, W. et al, Investments, 1999, S. 250ff.

partiellen Ableitungen nach x_i kann ermittelt werden, wie die erwartete Rendite $E(r_p)$ und das Risiko σ_p sich bei kleinen Verschiebungen des Anteils x_i ändern.

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial x_i} = E(r_i) - E(r_m) \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i^2 - \sigma_m^2 + x_i \sigma_m^2 + \sigma_{im} - 2x_i \sigma_{im}}{(x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i) \sigma_{im})^{1/2}}. \quad (4.25)$$

Das Austauschverhältnis zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko des Portfolios p bei einer Variation von x_i hat somit folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} &= \frac{\partial E(r_p)}{\partial x_i} / \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_i} \\ &= \frac{(E(r_i) - E(r_m)) (x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i) \sigma_{im})^{1/2}}{x_i \sigma_i^2 - \sigma_m^2 + x_i \sigma_m^2 + \sigma_{im} - 2x_i \sigma_{im}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Annahmegemäß wird ein Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt vorausgesetzt, deswegen weist das Wertpapier i einen Gewichtsanteil von $x_i = 0$ auf, weil im Marktportfolio bereits alle Wertpapiere enthalten sind. Aus diesem Grund kann das Austauschverhältnis in Gleichung 4.26 umgeformt werden:

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} \Big|_{x_i=0} = \frac{(E(r_i) - E(r_m)) \sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}. \quad (4.27)$$

Die Rendite-Risiko-Relation aus Gleichung 4.27 im Punkt m muss gleich der Steigung der Kapitalmarktklinie im Punkt m entsprechen. Für die Bewertung muss nun gelten:

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} \Big|_{x_i=0} = \frac{\partial E(r_m)}{\partial \sigma_m} = \frac{(E(r_i) - E(r_m)) \sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_m}. \quad (4.28)$$

Löst man dieses Gleichgewicht nach $E(r_i)$ auf, resultiert die sogenannte Wertpapierlinie, die von Sharpe als „security market line“¹³⁹ bezeichnet wird:

$$E(r_i) = r_f + \left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \right) \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} = r_f + (E(r_m) - r_f) \beta_i. \quad (4.29)$$

Für eine Aktie i entspricht die Renditeerwartung im Kapitalmarktgleichgewicht somit der Summe aus risikoloser Anlage und einem Risikozuschlag. Der Risikozuschlag ist ein Produkt aus erwarteter Risikoprämie des Marktes und dem nicht diversifizierbaren systematischen Risiko, dem Betafaktor, des betrachteten Titels. Der Ausdruck Betafaktor hat sich für das Maß der Risikohöhe etabliert. Das bedeutet, dass der Markt für die Übernahme unsystematischer Risiken bei einzelnen Wertpapieren keine Risikoprämie bezahlt. Deshalb bildet das Marktportfolio den einzigen relevanten Risikofaktor.

Beurteilung des CAPM-Modells Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell, das Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Rendite und dem Risiko macht. Die Testbarkeit des CAPM wird allerdings von manchen Autoren in Frage gestellt, da das wahre Marktportfolio bei solchen Tests nicht zum Einsatz kommt.¹⁴⁰ Dies ist der zentrale Kritikpunkt am CAPM. Da in der Literatur bislang keine eindeutige Bestätigung der Modellthesen des CAPM gefunden werden konnte, stellt sich die Frage, ob dies an den unrealistischen Modellannahmen liegt. Trotz aller Kritik ist das CAPM das bekannteste Modell zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen der erwarteten Rendite und dem Risiko von Wertpapieren. Neben der deskriptiven Funktion des CAPM zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Risiko und Rendite wird das Modell auch normativ angewendet. Dies zeigt sich sehr deutlich im Bereich der Performance-Messung, wo beispielsweise die Anlageergebnisse von Investmentfonds durch den Einsatz des CAPM beurteilt werden.¹⁴¹

¹³⁹Vgl. Sharpe, W., Portfolio Theory, 1970, S. 89.

¹⁴⁰Vgl. Roll, R., Critique, 1977, S. 129ff.

¹⁴¹Vgl. Steiner, M.; Bruns, C., Wertpapiermanagement, 2007, S. 29.

4.3.1.4 Grundlagen und Eigenschaften des Markt-Modells

Eine spezielle Form des Index-Modells verwendete Sharpe zur Illustrierung des später von ihm formulierten Capital-Asset-Pricing-Modells. Dieses Modell wurde vor allen unter der von Fama geprägten Bezeichnung Markt-Modell bekannt.¹⁴² Fama verwies auf eine Inkonsistenz in der Herleitung des CAPM durch Sharpe, die daraus resultiert, dass letzterer den Index I_M als Marktportfolio definiert, welches aus allen Aktien besteht. Diese Interpretation ist aber nicht mehr mit der Unabhängigkeit von I_M und ε_i vereinbar, so dass er den Marktindex I_M durch den allgemeinen Marktfaktor r_M ersetzt.¹⁴³ Formal lautet das Markt-Modell:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i. \quad (4.30)$$

Das Beta dient auch hier als Sensitivitätsmaß, das angibt, um welchen Betrag sich die Rendite der jeweiligen Aktie ändert, wenn die Rendite des Marktes um eine Einheit sinkt oder steigt. Der Index weist ex definitione einen Beta-Faktor von eins auf. Diese Normierung hat den Effekt, dass die Vergleichbarkeit der Betas unabhängig vom Kursniveau der Wertpapiere gewährleistet ist.¹⁴⁴ Das Marktmodell ist daher in Theorie und Praxis das Standardmodell zur Berechnung von Betafaktoren.¹⁴⁵ Der Betakoeffizient ist hier nichts anderes als die Steigung der Regressionsgeraden. Der Parameter α_i kennzeichnet den Abschnitt, an dem die Regressionsgerade die Ordinate schneidet. Gleichung 4.30 zeigt, dass die Rendite einer Aktie i in zwei Komponenten zerlegt werden kann: der marktbezogenen (systematischen) und der wertpapierbezogene (unsystematischen) Komponente. Die systematische Entwicklung ist durch den Betafaktor geprägt, das die Reagibilität der Aktie bezogen auf die Marktbewegung angibt. Unter der Voraussetzung, dass der Erwartungswert der Störvariablen $E(\varepsilon_i) = 0$ ist, gibt die unsystematische Komponente nur den Eigenertrag der Aktie α_i und spiegelt so die unternehmensspezifische Entwicklung wider.¹⁴⁶ Die Rendite- und Risikobeziehungen zwischen einzelnen Aktien und Index entsprechen im Markt-Modell mit unkorrelierten Störgrößen denen des

¹⁴²Vgl. Fama, E. F., Risk, 1968, S. 35f.

¹⁴³Vgl. Sharpe, W. F., Capital Asset Prices, 1964, S. 438-442; Fama, E. F., Risk, 1968, S. 37.

¹⁴⁴Vgl. Hielscher, U.; Heintzelmann, H., BETA-Faktoren, 1975, S. 8.

¹⁴⁵Vgl. Frantzmam, H.-J., Marktrisiko, 1990, S. 67-83.

¹⁴⁶Vgl. Steiner, P.; Uhler, H., Wertpapieranalyse, 2001, S. 143-144.

Single-Index-Modells. Deswegen können die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen analog aus den Gleichungen 4.18 bis 4.20 berechnet werden.

Beurteilung des Markt-Modells Das Marktmodell basiert auf der zentralen Annahme, dass Renditen und Risiken einzelner Wertpapiere ausschließlich über die Rendite bzw. das Risiko des Marktportfolios erklärt werden. Die Gleichung des Marktmodells wird regelmäßig als Testgleichung des CAPM verwendet.¹⁴⁷ Zudem liefert das Marktmodell durch seine Regressionsfunktion die in der Anlagepraxis verwendeten Berechnungsgrundlagen für die Bestimmung von Betafaktoren.

4.3.2 Das ergänzende Datenmaterial zum Betafaktor

Die empirische Analyse der Beta-Schätzung in dieser Arbeit erfolgt anhand von stündlichen Renditen. Als exemplarische Daten für die Bestimmung von Betafaktoren werden die stündlichen Renditen der Aktien des Deutschen Aktienindex (DAX) herangezogen, wobei als Grundlage für die Marktrendite der Deutsche Aktienindex verwendet wird. Als Datenbasis werden die Kursentwicklungen von 01.02.2008 bis zum 01.08.2008 verwendet. Für die Bildung der Überschussrenditen im Marktmodell wird eine Zeitreihe der Renditen einer risikolosen Anlage r_t^F benötigt. Hierfür wird der Tagesgeldmarktzinssatz verwendet, der von der Deutschen Bundesbank täglich publiziert wird. Da die Aktienrenditen auf der Basis stündlicher Kurse berechnet werden, muss auch die risikolose Verzinsung pro Stunde verwendet und daher vor Bildung der Überschussrenditen zuerst ermittelt werden. Die folgenden Ausführungen konzentrieren sich auf die Schätzung von Betafaktoren im Rahmen des Marktmodells.¹⁴⁸ Dieses Modell wird in der Praxis der Wertpapieranalyse bevorzugt eingesetzt.¹⁴⁹ Die empirischen Analysen für die Schätzung der Betafaktoren wurden mit Hilfe der Statistik-Software EVIEWS 6 von Quantitative Micro Software (QMS) durchgeführt.

¹⁴⁷Vgl. Fama, E. F., Capital, 1970, S. 403.

¹⁴⁸gemäß Kapitel 4.1.1.1.3 dieser Arbeit.

¹⁴⁹Vgl. Steiner, M.; Bruns, C., Wertpapiermanagement, 2007, S. 39.

4.3.3 Bestimmung des Betafaktors durch das Markt-Modell

4.3.3.1 Schätzung und empirische Ergebnisse des Marktmodells

Die Schätzung der Betafaktoren für die einzelnen Aktien erfolgt in diesem Abschnitt bei konstanter Varianz auf Basis des Marktmodells. Dabei erfolgt die Schätzung des Betafaktors durch das Kleinst-Quadrate-Verfahren. Die Renditegleichung ergibt sich für die empirische Untersuchung wie folgt:

$$\begin{aligned} r_{it} - r_t^F &= c_0 + \beta_i(r_{Mt} - r_t^F) + \varepsilon_{it} \\ \varepsilon_{it} &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Ergebnisse für die Parameterschätzungen des Marktmodells auf Basis des hier verwendeten Datenmaterials sind in den Tabellen 4.9 und 4.10 zu finden. Die Werte der t-Statistik befinden sich in den Klammern.

Es konnten für die hier verwendeten Renditereihen des Marktmodells hoch signifikante Betafaktoren geschätzt werden. Der unabhängige Schätzparameter c_0 der Renditegleichung ist für alle Aktien nicht signifikant von null verschieden, was anhand der t-Statistik der jeweiligen Parameter deutlich zu erkennen ist. Diese Bedingung wird vom CAPM gefordert und somit wird auch die Gültigkeit dieses Modells bestätigt. Die Schätzung für den von der Indexrendite unabhängigen Teil c_0 ist bei 17 DAX-Titeln negativ. Dies dürfte damit zu klären sein, dass die durchschnittliche Rendite des DAX deutlich höher liegt als bei diesen 17 Aktien. In dieser Untersuchung liegt der geschätzte Betafaktor einzelner Aktien zwischen 0,79 und 1,06, wobei die Mehrzahl aller Aktien einen Wert kleiner als eins haben. Damit sind alle DAX-Werte den Schwankungen des deutschen Aktienmarktes unterworfen. In Abschnitt 4.3.6 werden die Beta-Schätzungen der untersuchten Modelle miteinander verglichen. Die Güte der mittels Regression errechneten Geraden wird gemessen mit Hilfe des linearen Bestimmtheitsmaßes R^2 . Je näher der Wert des Bestimmtheitsmaßes an eins herankommt, desto besser wird die Renditeentwicklung des Einzelwertes durch den Marktindex erklärt.¹⁵⁰ Die DAX-Rendite kann je

¹⁵⁰Das Bestimmtheitsmaß wird als Quotient zwischen Varianz des Marktindex und der Varianz des betrachteten Wertpapiers multipliziert mit dem ermittelten quadrierten Betafaktor des Wertpapiers: $R^2 = \beta_i^2 \frac{\sigma_i^2}{\sigma_m^2}$.

nach Aktie zwischen 24 und 63 Prozent der Streuung der Aktienrendite erklären (vgl. Tabelle 4.9 und 4.10, Spalte 3).

4.3.3.2 Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das Marktmodells

Die entscheidene Frage in dem Marktmodell ist, ob die Residuen einer Normalverteilung unterliegen. Dazu wurde die Kurtosis berechnet und mittels Jarque-Bera-Tests auf Normalverteilung getestet. Es zeigt sich, dass, wie schon bei den empirischen Analyse der Finanzmarktrenditen in den vorigen Kapiteln, alle Residuen eine Kurtosis von deutlich größer als drei besitzen. Somit kann von einer leptokurtischen Verteilung der betrachteten Daten ausgegangen werden. Dies wird durch die JB-Statistik bestätigt, indem die Nullhypothese einer Normalverteilung hoch signifikant verworfen wird (vgl. Tabelle 4.9 und 4.10, Spalte 4 und 5). Deswegen wird im folgendem Abschnitt der Betafaktor des Marktmodells erneut geschätzt, wobei die Residuen einem GARCH-Prozess folgen.

Aktie	c_0	β_{KQ}	R^2	Kurtosis	JB
Adidas	-0.001 (-0.063)	0.8381* (17.5944)	0.5625	8.4848	1456.75
Allianz	-0.0025 (-0.1263)	0.9784* (23.3238)	0.5324	9.444	2093.121
BASF	-0.0012 (-0.0787)	0.8773* (23.9691)	0.6309	15.3869	7491.823
Bayer	0.0066 (0.3807)	0.8703* (23.2373)	0.5452	9.5054	2117.075
BMW	-0.0196 (-0.8865)	0.8751* (14.6112)	0.4295	13.7575	5924.215
Commerzbank	0.0081 (0.312)	1.0621* (17.4295)	0.4457	5.7661	372.9618
Continental	-0.0008 (-0.0341)	0.9239* (18.3096)	0.3963	25.1046	23599.13
Daimler	-0.0255 (1.3001)	0.9022* (22.7743)	0.5061	38.5471	62071.80
Deutsche Börse	-0.0358 (-1.3839)	0.9659* (13.8236)	0.4029	5.6888	386.9429
Deutsche Bank	-0.0154 (0.7351)	0.9081* (16.4609)	0.4752	10.4733	2774.836
Dt. Postbank	-0.0134 (-0.5250)	0.8434* (15.6554)	0.3448	23.9344	21374.03
Deutsche Post	-0.0262 (-1.4027)	0.8521* (17.8661)	0.5013	19.691	13714.15
Deutsche Telekom	-0.0117 (-0.6744)	0.8975* (19.9347)	0.5635	29.7878	35354.01
EON	0.0049 (0.3142)	0.8633* (17.6963)	0.5949	7.7478	1084.778
Fresenius Medical	0.0098 (0.5841)	0.7988* (16.6059)	0.5234	8.4395	1419.130

Tabelle 4.9: OLS-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte

Aktie	c_0	β_i	R^2	Kurtosis	JB
Henkel Vz.	-0.0106 (-0.5316)	0.8275* (16.8364)	0.4534	7.8411	1127.347
Hypo Real Estate	-0.0052 (-0.1588)	1.0275* (15.4754)	0.3166	15.648	7681.888
Infineon	-0.0235 (-0.698)	0.8752* (8.8408)	0.2457	14.2915	6308.117
Lufthansa	-0.0008 (-0.0369)	0.9705* (19.4929)	0.4837	12.2448	4256.469
Linde	0.0083 (0.5516)	0.8374* (15.8405)	0.5973	7.3169	904.8206
MAN	-0.0163 (0.7457)	0.9398* (19.1801)	0.4712	6.6593	642.6740
Metro	-0.0287 (1.6646)	0.7942* (19.2326)	0.5070	7.6979	1161.266
Merck	0.0002 (0.0146)	0.8302* (17.0656)	0.5299	11.3375	3372.848
Münchener Rück	0.0017 (0.1114)	0.8254* (29.0943)	0.5786	11.2881	3548.777
RWE	$-4.78E-05$ (-0.0031)	0.8343* (17.5356)	0.5751	11.583	3628.877
SAP	0.02486 (1.5499)	0.75856* (20.9929)	0.5202	21.418	16402.53
Siemens	0.0014 (0.0755)	0.90857* (22.786)	0.5234	12.4581	4294.941
ThyssenKrupp	0.0102 (0.4863)	0.9403* (22.4617)	0.4914	6.1853	486.6336
Tui	0.0061 (0.2886)	0.8316* (17.3368)	0.4277	8.2141	1330.432
Volkswagen	0.0291 (1.7573)	0.811* (18.9917)	0.5372	7.0075	802.7171
Signifikanzniveau :	* = 0, 01.				

Tabelle 4.10: OLS-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte

4.3.4 Bestimmung des Betafaktors durch das EGARCH-Modell

Die Schätzung der Betafaktoren erfolgt auf Basis des hier verwendeten Datenmaterials unter Berücksichtigung von bedingter Heteroskedastizität. Dabei werden die Betafaktoren für den deutschen Aktienmarkt in dieser empirischen Untersuchung durch ein modifiziertes Marktmodell geschätzt. Dieser Ansatz wird in der Hinsicht erweitert, dass die Annahme einer konstanten Varianz aufgegeben wird und durch eine sich im Zeitablauf variierende Varianz ergänzt wird. Im Kapitel drei dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass die Modelle der GARCH-Familie in der Lage sind, die nichtlinearen Strukturen in den Finanzmarktdaten der in dieser Arbeit untersuchten Renditereihen, adäquat zu modellieren. Um unterschiedliche Einflüsse positiver und negativer Informationen auf die Ausprägungen der Renditewerte (Leverage-Effekt) zu berücksichtigen, soll für die Schätzung der Betafaktoren ein EGARCH-Modell verwendet werden. Für Finanzmarktdaten hat sich eine sparsame Spezifikation der GARCH-Modelle bewährt.¹⁵¹ Aus diesem Grund soll die Varianz des Marktmodells für die Bestimmung des Betafaktors durch ein EGARCH-(1, 1)-Modell geschätzt werden.

4.3.4.1 Schätzung und empirische Ergebnisse des EGARCH-Modells

Die entsprechende Regressionsgleichung für die Bestimmung des Betafaktors, auf Basis des in dieser Arbeit verwendeten Datenmaterials, kann wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned}
 r_{it} - r_t^F &= c_0 + \beta_{GAR}(r_{Mt} - r_t^F) + \varepsilon_{it} \\
 \varepsilon_t | \phi_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\
 \ln \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 \left[\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right) \right] + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Die Ergebnisse der Schätzungen für den Betafaktor, unter Berücksichtigung der Heteroskedastizität, sind in den Tabellen 4.11 und 4.12 zu finden.

Zur Berücksichtigung der Heteroskedastizität für das hier genutzte Datenmate-

¹⁵¹Vgl. dazu Kapitel 3 dieser Arbeit.

rial wurde ein Marktmodell mit einem EGARCH-(1, 1)-Modell kombiniert. Dabei konnten hoch signifikante Betafaktoren geschätzt werden. Für 23 Aktien ergab die empirische Analyse, dass der von der Indexrendite unabhängige Parameter c_0 nicht signifikant von null verschieden ist, was anhand der t-Statistik der jeweiligen Aktienparameter deutlich zu erkennen ist. Somit ist das CAPM auch in diesem Modell, bis auf sieben Aktien (DAI, DB1, DBK, DPW, HRX, MEO und SIE), gültig. Die Schätzwerte für den von der Indexrendite unabhängigen Parameter c_0 sind bei 21 Aktien negativ. Dies dürfte damit zu erklären sein, dass die durchschnittliche Rendite des DAX deutlich höher liegt als bei diesen 21 Aktien.

Der geschätzte Betafaktor einzelner Aktien liegt bei diesem modifizierten Marktmodell zwischen 0,78 und 1,09, wobei die Mehrzahl aller Aktien einen Wert kleiner als eins haben. Somit unterliegen diese DAX-Werte den Schwankungen des deutschen Aktienmarktes.

Es konnten für die untersuchten DAX-Renditereihen in den meisten Fällen hoch signifikante EGARCH-(1, 1)-Modelle geschätzt werden. Der ARCH- a_i als auch der GARCH-Parameter β_j sind bei den meisten Aktien hoch signifikant. Anhand der Schätzergebnisse ist erkennbar, dass der GARCH-Parameter β_j bei 20 Aktien bedeutend größer ist als der ARCH-Parameter a_i . Daran erkennt man das hohe Ausmaß an Volatilitäts-Clustern in den Überschussrenditen. a_i ist dabei für das Ausmaß der unmittelbaren Reaktion auf neue Nachrichten ε_{it} verantwortlich, während β_j die Dauer des Abklingens der Wirkung beschreibt. Demnach ist die mit der Zeit abklingende Wirkung neuer Nachrichten ε_{it} deutlich intensiver als die unmittelbare Reaktion. Durch die nicht vorhandenen Vorzeichenrestriktionen reduziert sich die Stationaritätsbedingung für das EGARCH-(1, 1)-Modell auf $\beta_1 < 1$, und wird von allen geschätzten Renditereihen erfüllt.¹⁵² Aus den beiden Tabellen 4.11 und 4.12 wird deutlich, dass der Parameter γ für 19 Aktien mit einem negativen Vorzeichen versehen ist. Der für Finanzmarktdaten typische Leverage-Effekt wird für diese untersuchten Aktien bestätigt. Somit steigt die Volatilität nach schlechten Nachrichten stärker als nach positiven. Allerdings ist der Parameter γ für sieben dieser Aktien nicht signifikant von null verschieden und somit nicht erforderlich.

¹⁵²Vgl. dazu Kapitel 3.4.1.

4.3.4.2 Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das EGARCH-Modell

Nachdem sich die geschätzten Parameter des EGARCH-Modells als durchweg hoch signifikant erwiesen haben, müssen noch die standardisierten quadrierten Residuen auf Autokorrelation überprüft werden. Die quadrierten Residuen der in dieser Arbeit untersuchten Aktien weisen keine signifikanten Autokorrelationen mehr auf. Somit konnten alle nichtlinearen Muster berücksichtigt werden. Das EGARCH-(1,1)-Modell liefert eine gute Anpassung an die Daten für die hier geschätzten Aktien. Allerdings bewirkt die Berücksichtigung von ARCH-Effekten nicht, dass die standardisierten Residuen einer Normalverteilung folgen. Weiterhin hat die Kurtosis für alle Residuen einen deutlich größeren Wert als drei. Es kann weiter von einer leptokurtischen Verteilung der betrachteten Daten ausgegangen werden.

Aktie	c_0	β_{GAR}	a_0	a_i	β_j	γ
Adidas	-0.0078 (-0.4943)	0.852* (80.4336)	-0.66* (-5.4708)	0.2628* (4.8334)	0.6092* (7.8947)	-0.0167* (-0.5695)
Allianz	-0.0224 (-1.2138)	0.986* (62.5956)	-0.1464* (-9.0565)	0.163* (8.1149)	0.9639* (170.7178)	-0.0647* (-5.4613)
BASF	0.009 (0.6892)	0.8648* (90.6688)	-1.8612* (-12.5117)	0.4028* (9.4378)	-0.1055 (-1.0045)	0.0993* (3.3698)
Bayer	0.0011 (0.0647)	0.8994* (59.3891)	-0.0394* (-3.0982)	0.0456* (3.5653)	0.9939* (212.6533)	-0.0152** (-1.7075)
BMW	-0.0329 (-1.5345)	0.852* (67.8072)	-0.0941* (-7.1877)	0.1148* (7.9576)	0.9765* (135.6998)	-0.0335* (-2.9788)
Commerzbank	-0.0161 (-0.635)	1.0385* (54.1206)	-0.079* (-4.8343)	0.099* (4.977)	0.9791* (197.5185)	0.0033 (0.2921)
Continental	-0.0011 (-0.0527)	0.8821* (58.443)	-0.0875* (-9.3231)	0.1166* (9.3005)	0.991* (347.3364)	-0.0711* (-8.6593)
Daimler	-0.0296 (-1.89)**	0.9447* (75.9843)	-1.2865* (-17.9238)	0.7142* (19.7031)	0.2551* (4.2815)	0.1475* (4.5982)
Deutsche Börse	-0.0463*** (-1.7547)	0.9608* (56.1942)	-0.03* (-2.8897)	0.0355* (2.9779)	0.985* (131.178)	-0.01396** (-1.6982)
Deutsche Bank	-0.0514* (-2.5774)	0.9111* (66.6207)	-0.0999* (-5.291)	0.1185* (5.0531)	0.9782* (301.4038)	-0.0771* (-5.5956)
Dt. Postbank	-0.02 (-0.8632)	0.8434* (0.8778)	-0.0468* (-8.8595)	0.0608* (8.3786)	0.9885* (353.4417)	-0.0628* (-7.3916)
Deutsche Post	-0.046** (0.0242)	0.8845* (69.5935)	-1.1697* (-11.3722)	0.3935* (8.4177)	0.0539 (0.5904)	-0.1127* (-3.8191)
Deutsche Telekom	-0.0245 (-1.3396)	0.89* (69.2858)	-0.8268* (-14.1947)	0.1827* (4.6591)	0.3596* (7.6649)	-0.2846* (-10.8711)
EON	0.0016 (0.1008)	0.8656* (85.5784)	-2.3765* (-15.509)	0.0125 (0.5278)	-0.863* (-7.4426)	-0.0283 (-1.4998)
Fresenius Medical	-0.0026 (-0.1679)	0.8201* (69.6841)	-0.0923* (-6.9025)	0.088* (6.4278)	0.9759* (149.4823)	-0.0978* (-8.0654)

Tabelle 4.11: EGARCH-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte

Aktie	c_0	β_{GAR}	a_0	a_i	β_j	γ
Henkel Vz.	-0.0213 (-1.0874)	0.8389* (56.4114)	-0.0149* (-5.0396)	0.0198* (5.0535)	0.9981* (487.1785)	-0.0425* (-6.7915)
Hypo Real Estate	-0.0471** (-1.8012)	0.9519* (37.006)	-0.1638* (-13.7616)	0.242* (14.8996)	0.9682* (231.643)	-7.67E-05 (-0.0083)
Infineon	-0.0335 (-1.059)	0.8871* (42.0363)	-0.0499* (-6.427)	0.0853* (6.895)	0.9738* (189.0015)	-0.0354* (-4.4543)
Luft hansa	-0.0085 (-0.3763)	0.9513* (42.1773)	-0.0496* (-4.7184)	0.0588* (4.1896)	0.9843* (264.9337)	0.01732** (1.8051)
Linde	0.0029 (0.1915)	0.8588* (105.3949)	-0.4702* (-5.4667)	0.2131* (4.6649)	0.768* (17.1343)	0.0063 (0.2216)
MAN	-0.0278 (-1.2622)	0.9517* (56.734)	-0.90332* (-8.4256)	0.2775* (5.3937)	-0.1441 (-1.0226)	0.001 (0.0279)
Metro	-0.0418** (-2.4271)	0.8305* (63.4045)	-1.4685* (-10.5014)	0.3569* (8.0959)	-0.0818 (-0.7019)	-0.0609** (-1.9608)
Merck	-0.0033 (-0.1925)	0.8639* (73.2442)	-0.3056* (-6.0573)	0.1267* (5.1729)	0.8058* (24.0335)	-0.1179* (-5.8415)
Münchener Rück	-0.0144 (-1.0043)	0.8461* (63.1631)	-0.3754 (-9.6787)	0.2933 (10.6682)	0.8853 (42.3215)	-0.0296 (-1.2577)*
RWE	0.0094 (0.5901)	0.8371* (81.4749)	-1.9701* (-21.7959)	0.3179* (8.1451)	-0.3546* (-7.2652)	0.0948* (4.7515)
SAP	-0.0051 (-0.3497)	0.781* (58.1788)	-2.0536* (-29.3994)	0.4394* (14.6604)	-0.3715* (-8.4552)	0.0662* (3.2141)
Siemens	-0.0316*** (-1.6867)	0.9182* (56.4355)	-0.132* (-5.0589)	0.0933* (5.1177)	0.926* (55.2242)	-0.1267* (-6.19)
ThyssenKrupp	0.0197 (0.9514)	0.9469* (52.1322)	-0.0438 (-3.6687)	0.049 (4.0774)	0.988 (140.9155)	0.0032 (0.3896)*
Tui	0.0011 (0.0615)	0.8592* (52.2801)	-0.06* (-4.9063)	0.0736* (5.02)	0.9932* (298.021)	0.033* (3.8155)
Volkswagen	0.0239 (1.4692)	0.8146* (67.5635)	-0.1862* (-6.1269)	0.1302* (6.2441)	0.9232* (56.5519)	0.0611* (4.4403)
Signifikanzniveau :	* = 0, 01 ** = 0, 05 *** = 0, 10.					

Tabelle 4.12: EGARCH-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte

4.3.5 Bestimmung des Betafaktors durch das FAKTOR-GARCH-Modell

4.3.5.1 Modelldarstellung des FAKTOR-GARCH-Modells

Eine Klasse von GARCH-Modellen, die eine Verbindung der bekannten Modelle der Kapitalmarktmodelle mit den Methoden der Ökonometrie darstellt, sind die von Engle et al. (1990) eingeführten Faktor-GARCH-Modelle.¹⁵³ Hierbei wird angenommen, dass es einen oder mehrere Faktoren gibt, die die Volatilität beeinflussen. In diesem Modell ist \mathbf{y}_t ein $N \times 1$ Vektor von Beobachtungen mit K Faktoren, die im $K \times 1$ Vektor \mathbf{f}_t zusammengefaßt sind, und \mathbf{B} eine $N \times K$ Matrix der zeitinvarianten Faktorladungen. Dann kann das multivariate GARCH-Modell durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4.33)$$

wobei $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ein $N \times 1$ Residuenvektor ist, der eine zeitkonstante bedingte Kovarianz $\boldsymbol{\Omega}$ hat und positiv semidefinite ist. \mathbf{f}_t besitzt eine bedingte Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Lambda}_t$. Desweiteren wird angenommen, dass die Faktoren und die Residuen unkorreliert sind $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{f}_t) = 0$, dann ergibt sich die bedingte Kovarianzmatrix von \mathbf{y}_t :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.34)$$

Ist $\boldsymbol{\Lambda}_t$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen $\lambda_{k,t}$, kann das Modell auch wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \lambda_{k,t} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.35)$$

wobei \mathbf{b}_k die k -te Spalte von \mathbf{B} bedeutet und $\boldsymbol{\Omega}$ die möglichen Nebendiagonalelemente aufnimmt.¹⁵⁴

Da es sich bei den Faktoren \mathbf{f}_t um unbeobachtbare Größen handelt, werden diese durch faktorrepräsentierende Portfolios $r_{kt} = \phi_k' \mathbf{y}_t$ ersetzt. Die Portfoliogewichte

¹⁵³Vgl Engle, R. F. et al., Asset, 1990, S. 213-237.

¹⁵⁴Vgl. Engle, R. F. et al., Asset, 1990, S. 215.

ϕ_k sind orthogonal zu den Faktorladungen $\lambda_{k,t}$ für alle $j \in \{1, \dots, K\}, j \neq k$, und es soll gelten $\phi_k' \lambda_k = 1$. Für die bedingte Varianz von r_{kt} gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t-1}(r_{kt}) &= \theta_{kt} = \phi_k' \mathbf{H}_t \phi_k \\ &= \phi_k' (\mathbf{B} \Lambda_t \mathbf{B}' + \mathbf{\Omega}) \phi_k \\ &= \psi_k + \lambda_{k,t} \end{aligned} \quad (4.36)$$

mit $\psi_k = \phi_k' \mathbf{\Omega} \phi_k$. Der zweite Summand ist zeitunabhängig, somit liegt lediglich eine Niveauverschiebung der zeitabhängigen Varianz vor. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \theta_{kt} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \psi_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \lambda_{k,t} \\ \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \lambda_{k,t} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \theta_{kt} - \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \psi_k. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die bedingte Kovarianzmatrix eines faktorrepräsentierenden Portfolios kann, unter Berücksichtigung der obigen Bedingung, wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \theta_{kt} + \mathbf{\Omega}^*, \quad (4.38)$$

mit $\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{\Omega} - \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k' \psi_k$. Dabei wird die Dynamik jedes Faktorportfolios r_{kt} als univariater GARCH(1,1)-Prozeß modelliert:

$$\theta_{kt} = w_k + \alpha_k (\phi_k' \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1})^2 + \gamma_k [\phi_k' \mathbf{H}_{t-1} \phi_k] \quad (4.39)$$

Die Formulierung der bedingten Varianz kann beliebig von dieser GARCH(1,1)-Variante auf alle in dieser Arbeit vorgestellten univariaten GARCH-Modelle ausgeweitet werden.

4.3.5.2 Schätzung und empirische Ergebnisse des FAKTOR-GARCH-Modells

Die Schätzung der Betafaktoren für das hier verwendete Datenmaterial erfolgt unter Berücksichtigung einer sich im Zeitablauf variierenden Varianz. Dabei werden die Betafaktoren für den deutschen Aktienmarkt in dieser empirischen Untersuchung durch das oben vorgestellte Faktor-GARCH-Modell geschätzt. Für das Faktor-GARCH-Modell wird ein zweistufiges Schätzverfahren verwendet. In der ersten Stufe wird die Überschussrendite für den Marktindex geschätzt und durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} r_{mt} - r_{f,t} &= \pi_{mt} + \epsilon_{mt} \\ \pi_{mt} &= \alpha_m + \lambda_m \ln \sigma_{mt}^2 \\ \ln \sigma_{mt}^2 &= a_0 + a_i \left[\left| \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| - E \left(\left| \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| \right) \right] + \gamma \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} + \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Es wird dazu ein E-GARCH-M Modell verwendet. Dieses Modell berücksichtigt neben dem Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko noch den Leverage-Effekt. Die ermittelte Faktorrisikoprämie und die bedingte Varianz gehen als vorselektierte Regressoren in die zweite Schätzstufe für die Überschussrenditen der einzelnen Aktien ein. Somit ergibt sich für die zweite Schätzstufe die folgende Regressionsgleichung:

$$\begin{aligned} r_{it} - r_{f,t} &= \alpha_i + \beta_{FAR} \pi_{mt} + \epsilon_{it} \\ \sigma_{it}^2 &= \omega_1 + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-j}^2 + \kappa_1 \ln \sigma_{mt}^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

In Tabelle 4.13 sind die Ergebnisse der ersten Schätzstufe des Faktor-GARCH-Modells ausgewiesen. Das EGARCH-M-Modell zeigt, dass für die DAX-Überschussrenditen ein positiver signifikanter Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko existiert. Dieses entspricht der Erwartung der Risikoaversion. Dieser GARCH-in-Mean-Effekt wird durch den positiven Schätzwert für den Marktpreis des Risikos λ ausgedrückt. Die Koeffizienten in der bedingten Varianzgleichung sind alle hoch signifikant, was anhand der t-Statistik der jeweiligen Parameter deutlich zu erkennen ist. Daraus ergibt sich, dass der Leverage-Effekt vorhanden ist, und somit der

Parameter γ in diesem Modell signifikant negativ ist. Die Volatilität steigt in diesem geschätzten Modell nach schlechten Nachrichten stärker an als nach positiven.

$r_{mt} - r_{f,t} =$	-0.220510	$+ 0.409358 \ln \sigma_{mt}^2 + \epsilon_{mt}$
	(-4.014886)	(4.134232)
$\ln \sigma_{mt}^2 =$	-0.178273	$-0.266035 \left[\left \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right - E \left(\left \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right \right) \right]$
	(-7.772786)	(-12.62566)
	$-0.060140 \frac{\epsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} + 0.501911 \ln \sigma_{mt-j}^2$	
	(-2.858281)	(12.98480)

Tabelle 4.13: Schätzergebnis der ersten Stufe

Die geschätzten Parameter der zweiten Stufe für die hier untersuchten Aktien sind in den Tabellen 4.14 und 4.15 wiedergegeben. Unter Berücksichtigung einer sich im Zeitablauf variierenden Varianz für das hier genutzte Datenmaterial wurde ein Faktor-GARCH-Modell geschätzt. Dabei konnten für alle Aktien hoch signifikante Betafaktoren geschätzt werden. Die Mehrzahl aller Aktien haben einen Betafaktor kleiner als eins, wobei das Maximum bei 1,036 für Commerzbank und das Minimum bei 0,75 für SAP liegt. Die empirische Analyse ergab für die Schätzung des von der Indexrendite unabhängigen Teil c_0 , dass 20 Aktien ein negatives Vorzeichen haben, damit dürfte die durchschnittliche Rendite des DAX deutlich höher liegen als bei diesen 20 Aktien. Für 27 Aktien ist der Parameter nicht signifikant von null verschieden, was durch die t-Statistik der geschätzten Parameter gezeigt wird. Somit ist das CAPM auch in diesem Modell in fast allen Schätzungen gültig.

Es konnten für die in dieser Arbeit untersuchten Aktien in der zweiten Schätzstufe in den meisten Fällen hoch signifikante GARCH-(1,1)-Modellschätzungen durchgeführt werden. Die ARCH- a_i und die GARCH-Parameter β_j sind meistens für alle geschätzten Aktien hoch signifikant. Anhand dieser Schätzergebnisse ist erkennbar, daß der GARCH-Parameter β_j bei 24 Aktien bedeutend größer ist als der ARCH-Parameter a_i . Damit wird auch bei der Schätzung eines Faktor-GARCH-Modells deutlich, dass ein hohes Ausmaß an Volatilitäts-Clustern in den Überschussrenditen existiert. Die Konstante ω_1 in der Varianzgleichung ist für sechs Aktien (Adidas, Allianz, Deutsche Post, Hypo Real Estate, Infineon und SAP) negativ, allerdings sind nur vier Parameter davon nicht signifikant von Null

verschieden und somit nicht erforderlich. Der Effekt des zusätzlichen geschätzten Parameters κ_1 in der Varianzgleichung liegt in einem Intervall von -0,56 und 1,32. Dabei sind 11 Werte des Parameters κ_1 nicht signifikant von null verschieden und somit nicht notwendig für die Varianzgleichung.

Aktie	α_i	β_{FAR}	ω_1	a_1	β_1	κ_1
Adidas	-0.0049 (-0.308)	0.8549 (90.433)*	-0.0028 (-0.0961)	0.1207 (3.985)*	0.5617 (3.4708)*	0.1875 (2.0653)*
Allianz	-0.002 (-0.1444)	0.9823 (27.1499)*	-0.0253 (-0.6165)	0.0851 (2.9307)*	0.8718 (17.831)*	0.0859 (1.0523)*
BASF	-0.009 (-0.537)	0.9002 (26.997)*	0.5222 (3.6647)*	0.3259 (2.0097)*	-0.0325 (-3.5275)*	-0.5687 (-2.4614)*
Bayer	-0.028 (-0.8212)	0.8529 (21.707)*	0.6439 (2.3445)*	-0.0248 (-14.6007)*	0.2516 (0.7432)	-0.3672 (-1.7851)***
BMW	-0.017 (-0.8378)	0.8611 (13.125)*	0.0344 (0.5159)	0.0501 (2.0104)*	0.9194 (27.4888)*	-0.0271 (-0.2551)
Commerzbank	0.006 (-0.2456)	1.0369 (20.2202)*	0.0213 (0.5414)	0.0277 (2.1959)*	0.9603 (46.4303)*	-0.0213 (-0.3302)
Continental	-0.003 (-0.1475)	0.9397 (18.9801)*	1.1312 (3.9989)*	0.0094 (2.2368)*	-0.9181 (-3.7415)*	0.3859 (0.6331)*
Daimler	-0.0389 (-2.1324)**	0.9506 (27.5467)*	0.2837 (2.9739)*	0.4943 (2.4338)*	-0.0371 (-8.8612)*	-0.0426 (-0.2685)
Deutsche Börse	-0.0365 (-1.4262)	0.9659 (13.386)*	0.0535 (0.7417)***	0.0055 (0.666)	0.9701 (30.6029)*	-0.064 (-0.6725)***
Deutsche Bank	-0.021 (-1.1939)	0.9169 (19.8815)*	0.01 (0.3944)	0.0553 (2.6547)*	0.9239 (26.0874)*	0.0031 (0.0577)
Dt. Postbank	0.0066 (0.1886)	0.8922 (13.992)*	0.0116 (0.3124)	0.0199 (1.8071)*	0.9636 (44.2868)*	0.6092 (0.3944)
Deutsche Post	-0.036 (-1.8078)***	0.8729 (24.9258)*	-0.1184 (-2.6341)*	0.2155 (4.1145)*	0.3956 (4.8202)*	0.5303 (4.3946)*
Deutsche Telekom	-0.0058 (-0.3504)	0.8994 (19.707)*	0.0429 (0.3602)	0.0286 (1.1599)***	0.616 (1.5403)*	0.1488 (0.8604)*
EON	-0.0033 (-0.1935)	0.8627 (23.5)*	0.1257 (1.3394)*	-0.0279 (-5.2915)*	0.5381 (2.2839)*	0.1127 (1.038)
Fresenius Medical	0.0282 (1.7443)**	0.8135 (20.7053)*	0.0479 (1.9205)*	0.0214 (1.7844)*	0.9523 (57.6664)*	-0.0711 (-1.8324)*

Tabelle 4.14: Faktor-Garch-Schätzung der Beta-Faktoren erste Hälfte

Aktie	α_i	β_{FAR}	ω_1	a_1	β_1	κ_1
Henkel Vz.	-0.016 (-0.8243)	0.839 (18.0131)*	0.0308 (0.4069)	0.059 (1.7886)*	0.6675 (2.6931)*	0.1746 (1.0444)*
Hypo Real Estate	-0.036 (-1.1366)	0.9497 (19.585)*	-0.0233 (-0.3184)	0.1002 (2.5675)*	0.8969 (26.5572)*	0.0771 (0.6045)***
Infineon	-0.0196 (-0.6063)	0.8819 (8.9618)*	-0.129 (-0.5223)***	0.046 (1.332)*	0.495 (1.9638)*	1.3219 (1.7771)*
Lufthansa	-0.02 (-0.7887)	0.9971 (21.9221)*	0.4112 (1.9655)***	0.2256 (2.5441)*	-0.0409 (-2.4454)*	0.1174 (0.3089)
Linde	0.0042 (0.271)	0.8617 (17.0349)*	0.067 (0.9533)***	0.0853 (2.7683)*	0.678 (3.4243)*	-0.0065 (-0.076)
MAN	-0.0283 (-0.9546)	0.9676 (20.1199)*	0.7269 (2.8298)*	0.0603 (1.8244)***	-0.4679 (-1.8082)***	0.5986 (1.716)***
Metro	-0.0234 (-1.3801)	0.8348 (22.1226)*	0.0214 (0.6483)	0.0565 (2.6903)*	0.883 (16.6285)*	-0.0009 (-0.0198)
Merck	0.0094 (0.5883)	0.8709 (20.1095)*	0.0141 (0.3055)	0.0968 (1.7888)*	0.7092 (3.7883)*	0.0983 (0.9556)*
Münchener Rück	-0.005 (-0.3358)	0.8406 (35.561)*	0.0058 (0.2380)	0.1524 (2.2694)*	0.7168 (7.7201)*	0.0564 (1.2301)***
RWE	-0.0009 (-0.0615)	0.8336 (19.8242)*	0.0856 (1.7519)	0.216 (1.825)*	-0.0435 (-1.4364)**	0.2975 (2.9307)*
SAP	0.0212 (1.2908)	0.75 (23.3803)*	-0.0175 (-0.3683)	0.0861 (2.2883)*	0.7444 (9.3113)*	0.1259 (1.2946)*
Siemens	0.0043 (0.2352)	0.923 (22.689)*	0.2124 (1.2892)*	0.0787 (2.5839)*	0.7021 (5.0257)*	-0.2209 (-1.0437)*
ThyssenKrupp	0.019 (0.9185)	0.9499 (23.317)*	0.0077 (0.3418)	0.0195 (1.7624)***	0.9641 (42.6479)*	0.0014 (0.0429)
Tui	0.0031 (-0.1601)	0.8594 (18.2722)*	0.0184 (0.5014)*	0.0328 (3.188)*	0.9525 (62.868)*	-0.0199 (-0.3396)
Volkswagen	0.021 (1.3428)	0.8271 (21.7428)*	0.0626 (1.8744)	0.0601 (2.2429)*	0.8477 (12.5304)*	-0.0607 (-1.1423)***
Signifikanzniveau :	* = 0, 01	** = 0, 05	*** = 0, 10.			

Tabelle 4.15: Faktor-Garch-Schätzung der Beta-Faktoren zweite Hälfte

4.3.5.3 Beurteilung der Bestimmung des Betafaktors durch das FAKTOR-GARCH-Modell

Da die geschätzten Parameter des FAKTOR-GARCH-Modells sich als durchweg hoch signifikant erwiesen haben, müssen noch die standardisierten quadrierten Residuen auf Autokorrelation überprüft werden. Die quadrierten Residuen, die durch das FAKTOR-GARCH-Modell geschätzt wurden, weisen keine signifikanten Autokorrelationen in den Residuen mehr auf. Somit konnten die nichtlinearen Muster durch die Schätzung des zweistufigen FAKTOR-GARCH-Modells berücksichtigt werden. Das FAKTOR-GARCH-Modell liefert eine gute Anpassung an die Daten. Allerdings bewirkt die Berücksichtigung von ARCH-Effekten nicht, dass die standardisierten Residuen einer Normalverteilung folgen. Weiterhin hat die Kurtosis für alle Residuen einen deutlich größeren Wert als drei. Damit folgen die betrachteten Daten weiterhin einer leptokurtischen Verteilung.

4.3.6 Vergleich der empirischen Ergebnisse zum Betafaktor

Auch bei nicht normalverteilten, heteroskedastischen Störgrößen bleibt der Kleinst-Quadrate-Schätzer (KQ) der beste lineare unverzernte Schätzer für den Betafaktor. Bei dem Maximum-Likelihood-Verfahren (ML) werden die Schätzungen nur zufällig mit dem linearen Verfahren übereinstimmen, trotzdem besitzt der ML-Schätzer gegenüber den mit dem KQ-Verfahren bestimmten Schätzern für den Betafaktor β eine größere Effizienz. Deswegen sind keine systematischen Unterschiede zwischen den beiden Verfahren zu erwarten, da ML und KQ-Schätzer oftmals übereinstimmen.

Im Folgenden werden die Schätzungen der Betafaktoren im Marktmodell bei konstanter Varianz, im EGARCH-Modell sowie in der Form eines FAKTOR-GARCH-Modells einander gegenübergestellt. Tabelle 4.16 enthält die Resultate dieser drei Modelle für die einzelnen geschätzten Wertpapiere des DAX. Große Unterschiede zwischen den geschätzten Betafaktoren lassen sich nicht feststellen, obwohl die Beta-Werte des FAKTOR-GARCH-Modells bei 22 und beim EGARCH Modell bei 21 Aktien größer sind als der entsprechende Wert beim KQ-Schätzer.

Alle drei Modelle liefern Beta-Werte, die meistens kleiner als eins sind, wobei die Commerzbank den höchsten und SAP den niedrigsten Beta-Wert haben. Scheicher kommt bei seiner empirischen Arbeit auf sehr ähnliche Ergebnisse, indem alle KQ-Betas einen niedrigeren Wert als die Schätzungen durch die GARCH-Modelle haben.¹⁵⁵ In der Untersuchung von Zagst, Hermann und Schmid werden auch sehr geringe Unterschiede zwischen den unterschiedlichen KQ- und GARCH-Beta-Schätzungen festgestellt.¹⁵⁶ Zu einem deutlich anderen Ergebnis kommen Geyer und Hauer.¹⁵⁷ Ihre Untersuchung ergab, dass bei lediglich einer Ausnahme alle 28 untersuchten Aktien einen niedrigen Betafaktor ausweisen, wenn eine Schätzung mit dem GARCH-Modell anstatt mit dem KQ-Modell erfolgt. Sie führen dies darauf zurück, dass die GARCH-Betas weniger von Extremwerten in den Renditen beeinflusst werden als die KQ-Betas.¹⁵⁸ Zimmermann¹⁵⁹ nennt als weitere mögliche Ursache den Crash von 1987, der extreme Renditen hervorgebracht habe, und führt eine weitere Untersuchung von Gosh¹⁶⁰ an, die dieses Ergebnis niedrigerer Betafaktoren für den amerikanischen Aktienmarkt bestätigt. Dannenbring und Missong kommen zu einem ähnlichen Ergebnis, indem die durch GARCH-Modelle geschätzten Beta-Werte tendenziell unter den entsprechenden KQ-Schätzwerten liegen.¹⁶¹ Diese gravierenden Unterschiede bei den Beta-Schätzungen mögen zu einem an der unterschiedlichen Periodisierung der verwendeten Daten liegen (in dieser Arbeit werden stündliche Renditen verwendet und nicht Monatsdaten) und zum anderem an der beginnenden weltweiten Finanzmarktkrise.

Die empirischen Ergebnisse sollen anhand ihrer Modellgüte verglichen werden. Da für das EGARCH- und das FAKTOR-GARCH-Modell das Bestimmtheitsmaß (R^2) als Maßstab der Modellgüte ungeeignet ist, und daher kein direkt vergleichbares Gütekriterium existiert, werden die geschätzten Standardfehler der Betafaktoren als Gütemaß verwendet. Der Standardfehler einer Schätzung ist ein Maß für die Anpassungsgüte der Regressionsgleichung. Je kleiner dieser Standardfehler

¹⁵⁵Vgl. Scheicher, M., Time-varying, 2000, S. 85.

¹⁵⁶Vgl. Zagst, R.; Hermann, F. und Schmid, W., GARCH-Modelle, 1996, S. 50.

¹⁵⁷vgl. Geyer, A.; Hauer, S., ARCH Modelle, 1991, S. 65-74.

¹⁵⁸vgl. Geyer, A.; Hauer, S., ARCH Modelle, 1991, S. 71-73.

¹⁵⁹Vgl. Zimmermann, P., Schätzung, 1997.

¹⁶⁰vgl. Gosh, A.K., Market Model, 1992, S. 279-282.

¹⁶¹Vgl. Dankenbring, H.; Missong, M., GARCH-Effekte, 1997, S. 322.

ist, desto präziser kann ein Parameter geschätzt werden.¹⁶² Dementsprechend groß ist das Interesse an kleinen Werten für den Standardfehler. Die höhere Effizienz der EGARCH-Schätzung wird dadurch bestätigt, dass in allen Schätzungen der Standardfehler der jeweilige Betawert im EGARCH-Modell kleiner ist als bei der KQ-Schätzung.

Neben dem EGARCH-Modell wurde in dieser Arbeit auch ein FAKTOR-GARCH-Modell für die einzelnen Aktien geschätzt. Hierbei konnte für 6 Aktien der geschätzte Standardfehler der Betafaktoren bei der FAKTOR-GARCH-Schätzung gegenüber der EGARCH-Schätzung nochmals gesenkt werden, trotzdem kommt es bei 24 Aktien zu einer Steigerung dieses Schätzfehlers. Das liegt daran, dass das FAKTOR-GARCH-Modell ein zweistufiges Schätzverfahren verwendet und somit eine höhere Anzahl an Parametern geschätzt werden müssen. Bei einer größeren Anzahl zu schätzender Parameter kann die Genauigkeit der Schätzung einzelner Faktoren sinken. Trotzdem liegt der Schätzfehler im FAKTOR-GARCH-Modell nur bei 6 Aktien über dem jeweiligen Wert bei der KQ-Schätzung. Somit ermöglicht die Modellierung der Wertpapierrenditen mit Hilfe der hier verwendeten GARCH-Modelle bessere Schätzergebnisse für die Betafaktoren als die Methode der KQ-Schätzung, wobei für die Bestimmung der Betafaktoren das EGARCH-Modell dem FAKTOR-GARCH-Modell überlegen ist.

¹⁶²Vgl. Stier, W., Forschungsmethoden, 1999, S. 128.

Aktie	β_{KQ}	β_{EGAR}	β_{FAR}	Aktie	β_{KQ}	β_{EGAR}	β_{FAR}
Adidas	0.8381 (0.0476)	0.852 (0.0105)	0.8549 (0.0094)	Henkel Vz.	0.8275 (0.0491)	0.8389 (0.0148)	0.839 (0.0465)
Allianz	0.9784 (0.0366)	0.986 (0.0157)	0.9823 (0.0149)	Hypo Real Estate	1.0275 (0.0664)	0.9519 (0.0257)	0.9497 (0.0484)
BASF	0.8773 (0.0374)	0.8648 (0.0095)	0.9002 (0.0105)	Infineon	0.8752 (0.0989)	0.8871 (0.0211)	0.8819 (0.0984)
Bayer	0.8703 (0.0374)	0.8994 (0.0151)	0.8529 (0.0392)	Lufthansa	0.9705 (0.0497)	0.9513 (0.0225)	0.9971 (0.0454)
BMW	0.8751 (0.0598)	0.852 (0.0125)	0.8611 (0.0656)	Linde	0.8374 (0.0528)	0.8588 (0.0081)	0.8617 (0.0505)
Commerzbank	1.0621 (0.0609)	1.0385 (0.0191)	1.0369 (0.0512)	MAN	0.9398 (0.0489)	0.9517 (0.0167)	0.9676 (0.0481)
Continental	0.9239 (0.0504)	0.8821 (0.0151)	0.9397 (0.0495)	Metro	0.7942 (0.0412)	0.8305 (0.0130)	0.8348 (0.0377)
Daimler	0.9022 (0.0396)	0.9447 (0.0124)	0.9506 (0.0345)	Merck	0.8302 (0.0486)	0.8639 (0.0117)	0.8709 (0.0433)
Deutsche Börse	0.9659 (0.0698)	0.9608 (0.0171)	0.9659 (0.0721)	Münchener Rück	0.8254 (0.0283)	0.8461 (0.0133)	0.8406 (0.0236)
Deutsche Bank	0.9081 (0.0551)	0.9111 (0.0136)	0.9169 (0.0461)	RWE	0.8343 (0.0475)	0.8371 (0.0102)	0.8336 (0.0421)
Dt. Postbank	0.8434 (0.0538)	0.8434 (0.0188)	0.8922 (0.0637)	SAP	0.75856 (0.0361)	0.781 (0.0134)	0.75 (0.0321)
Deutsche Post	0.8521 (0.0476)	0.8845 (0.0127)	0.8729 (0.035)	Siemens	0.90857 (0.0398)	0.9182 (0.0162)	0.923 (0.0406)
Deutsche Telekom	0.8975 (0.045)	0.89 (0.0128)	0.8994 (0.0456)	ThyssenKrupp	0.9403 (0.0418)	0.9469 (0.0181)	0.9499 (0.0407)
EON	0.8633 (0.0487)	0.8656 (0.0101)	0.8627 (0.0367)	Tui	0.8316 (0.0479)	0.8592 (0.0164)	0.8594 (0.047)
Fresenius Medical	0.7988 (0.0481)	0.8201 (0.0117)	0.8135 (0.0392)	Volkswagen	0.811 (0.0427)	0.8146 (0.0121)	0.8271 (0.038)

Tabelle 4.16: Vergleich der Beta-Schätzungen

Kapitel 5

Schlussfolgerungen und Ausblick

Die Kapitalmarkttheorie hat grundlegende Konzepte zur Modellierung finanzwirtschaftlicher Zeitreihen entwickelt. Am Beispiel von ausgewählten finanzwirtschaftlichen Zeitreihen, die auf stündlicher Intraday Basis vorlagen, wurde im Rahmen dieser Arbeit empirisch die Modellierung dieser Zeitreihen durch Modelle der Kapitalmarkttheorie überprüft. Im Einzelnen wurden finanzwirtschaftliche Zeitreihen der Renditen des DAX, des E-STOXX, der EON-Aktie, der EADS-Aktie, des EUR/US\$-Wechselkurses und des BRENT Rohölpreises herangezogen. Es fand eine Zeitreihenanalyse dieser Finanzmarktdaten statt. Dabei wurden diese Finanzmarktdaten auf ihre statistischen Eigenschaften und auf die linearen Abhängigkeiten in den Renditen untersucht. Es zeigte sich, dass die Renditen nicht normalverteilt sind, sondern eine leptokurtische Verteilung haben. Bei der Überprüfung der linearen Abhängigkeiten konnten für alle untersuchten Daten ausgeprägte Abhängigkeiten in den quadrierten Renditen festgestellt werden. Diese Ergebnisse zeigen, dass in den untersuchten Finanzmarktdaten nichtlineare Abhängigkeiten enthalten sind.

Als Grundlage für das weitere Vorgehen, wurden diese Zeitreihen einer intensiven Volatilitätsanalyse unterzogen. Dabei wurde festgestellt, dass die hier untersuchten Renditereihen die typischen Merkmale von Finanzmarktdaten aufweisen, d. h., dass sie durch Heteroskedastizität und Volatilitäts-Cluster gekennzeichnet sind. Für die in dieser Arbeit verwendeten Finanzmarktdaten wurden die folgenden Volatilitätsmodelle ARCH(1)-, GARCH(1,1)-, GARCH-M(1,1)-, EGARCH(1,1)-

und TGARCH (1,1)-Modell angepaßt. Dabei zeigte sich, dass das ARCH- und das GARCH-M-Modell den anderen Volatilitätsmodellen unterlegen sind. Dennoch konnte gezeigt werden, dass alle Modelle, bis auf das ARCH-(1)-Modell, zu einer adäquaten Modellierung auf der Basis stündlicher Finanzmarktdaten der bedingten Heteroskedastie in der Lage sind. Für die hier analysierten Finanzmarktdaten wurde anhand der geschätzten GARCH-Modelle festgestellt, dass diese Daten als schwach informationseffizient bezeichnet werden können.

Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit bildete die empirische Analyse von Risikomaßen bei Finanzmarktdaten. Dabei stand im Fokus der Risikomaße der Value-at-Risk und der Betafaktor.

Für den Bereich des Risikomanagements wurde der Value-at-Risk als Riskomaß für den Dax, die Deutsche Bank, Die Münchner Rück und VW ermittelt. Dabei wurde der VaR-Wert auf einer stündlichen Datenbasis anhand der historischen Simulation und den analytischen Methoden unter der Verwendung der exponentiellen Glättung und eines GARCH(1,1)-Modell berechnet. Dabei wurde deutlich, dass das Value-at-Risk-Maß als Risikomaß auf die Phasen größerer und kleinerer Risiken der einzelnen Werte im stündlichen Zeitablauf stark reagiert. Dies ist nicht weiter erstaunlich, da diese Schwankungen ein typisches Merkmal von Finanzmarktdaten sind. Um die VaR-Berechnungen zu bewerten, wurden die Ergebnisse dem Backtesting-Verfahren unterzogen. Für eine Wahrscheinlichkeit von 95% erzielte das analytische GARCH(1,1)-Modell das beste Resultat. Bei einem Konfidenzniveau von 97,5% konnte kein Verfahren eindeutig dominieren, weil die Ergebnisse bei den drei Methoden sehr eng zusammen lagen. Bei einem Niveau von 99% ergab sich eine Favorisierung für die historische Simulation.

Im Rahmen der kapitalmarkttheoretischen Bewertung von Aktien wurde als Risikomaß die Schätzung der Beta-Faktoren für die einzelnen Aktien des Dax bei konstanter Varianz, bei Berücksichtigung eines EGARCH-Modells sowie in der Form eines Faktor-GARCH-Modells untersucht. Große Unterschiede zwischen den geschätzten Beta-Faktoren konnten sich nicht feststellen lassen, obwohl die Beta-Werte des KQ-Modells tendenziell etwas geringer waren. Gemessen an den geschätzten Standardfehler der Beta-Faktoren ermöglichten die beiden GARCH-Modelle eine genauere Schätzung der Betafaktoren als die KQ-Schätzung.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass es GARCH-Modelle mittels ökonometrischer Methoden vermögen, statistische Eigenschaften von stündlichen Finanzmarktdaten explizit zu modellieren. Insgesamt besteht ein breitgefächertes Einsatzgebiet dieser Modelle. Daher ist in Zukunft mit einer Weiterentwicklung ihrer Anwendungsbereiche und einer vermehrten Analyse multivariater Zeitreihen zu rechnen. Dabei sollten GARCH-Modelle mit flexibleren Verteilungen, die die Charakteristika von Finanzmarktdaten besser berücksichtigen als die Normalverteilung, kombiniert werden. Dies ist vor allem von ökonomischer Bedeutung, da viele ökonomische Zeitreihen in einer engen Beziehung zueinander stehen. Dabei sollten diese Modelle versuchen, die Volatilität adäquat zu beschreiben und eine leichte Schätzbarkeit aufweisen.

Literaturverzeichnis

- [1] Alexander, Carol. O., (covariance, 1997): On the covariance matrices used in value-at-risk models: in: Journal of Derivatives, Vol. 4, S. 50-62.
- [2] Bärlocher von Küsnacht, Jürg, (GARCH-Prozesse, 1992): GARCH-Prozesse als Modelle für Devisenkurse, Winterthur, 1992.
- [3] Baille, Richard T., (Long Memory Processes, 1996): Long Momory Processes and Fractional Integration in Econometrics, in: Journal of Econometrics, Vol. 73, 1996, S. 5-59.
- [4] Baseler Ausschuss fur Bankenaufsicht, (Änderung, 1996): Überblick über die Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung von Marktrisiken, Basel, 1996.
- [5] Baseler Ausschuss fur Bankenaufsicht, (Basel, 2001a), The new Basel capital accord, an explanatory note, in: Bank fur Internationalen Zahlungsausgleich, in: Pfad (<http://www.bis.org>), 26.03.08.
- [6] Baseler Ausschuss fur Bankenaufsicht, (2001b,), The new Basel capital accord. Bank fur Internationalen Zahlungsausgleich, in: Pfad (<http://www.bis.org>), 26.03.08.
- [7] Bera, Anil K.; Higgins, Matthew L., (ARCH, 1993): ARCH models: properties, estimation and testing, in: Journal of Economic Surveys 7, 1993, S. 305-366.
- [8] Bera, Anil K., Jarque Carlos M., (Tests, 1980): Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals, in: Economics Letters, Vol. 6, 1980, S. 255–259.

- [9] Berndt, E. K., Hall, B. H., Hall, R. E., Hausmann, J., (Estimation and Inference, 1974): Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models, Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, 1974, S. 653-665.
- [10] Bönnte, Gunnar, (Analyse, 1997): Analyse deutscher Aktien und Optionsscheine mittels ARCH-Modellen unter Berücksichtigung von Verteilungen robuster Statistik, Erlangen-Nürnberg, 1997.
- [11] Bollerslev, Tim, (Generalized, 1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, in: Journal of Econometrics, Vol. 31, 1986, S. 307-327.
- [12] Bollerslev, Tim; Chou, Ray Y.; Kroner, Kenneth F., (ARCH, 1992): ARCH Modelling in Finance - A Review of the Theorey and Empirical Evidence, in Journal of Econometrics, Vol. 4, 1992, S. 5-59.
- [13] Bollerslev, Tim; Engle, Robert F., (persistence, 1986): Modelling the persistence of conditional variances, in: Econometric Reviews, Vol. 5, 1986, S. 1-50.
- [14] Bollerslev, Tim; Engle, Robert F.; Nelson, Daniel. B , (ARCH, 1994): ARCH Models, in: Handbook of Econometrics, Vol. 4, 1994, S. 2959-3038.
- [15] Box, George E. P.; Jenkins, Gwilym M., (Time, 1970): Time Series Analysis Forecasting and Control, San Francisco, 1970.
- [16] Dickey, Davis A.; Fuller, Wayne A., (Likelihood, 1981): Likelihood Ratio Statistics of Autoregressive Time Series with a Unit Root, in: Econometrica, Vol. 49, 1981, S. 1057-1072.
- [17] Elton, Edwin J.; Gruber, Martin J., (Portfolio, 1991): Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 4. Aufl., New York 1991.
- [18] Engle, Robert F., (Heteroscedasticity, 1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, in: Econometrica, Vol. 50, 1982, S. 987-1007.
- [19] Engle, Robert. F., (ARCH, 2004): ARCH – Selected Readings, Oxford University Press, Oxford, 2004.

- [20] Engle, Robert. F., Lilien, D. M., Robins, R. P., (Estimation, 1987): Estimation of Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, in: *Econometrica*, Vol. 55, 1987, S. 391-407.
- [21] Engle, R. F.; Ng, Victor. K.; Rothschild, M., (Asset, 1990): Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure: empirical estimates for treasury bills, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 45, S. 213-237.
- [22] Fama, Eugene F., (Behaviour, 1965): The behaviour of stock market prices, in: *Journal of Business*, Vol. 38, 1965, S. 34-105.
- [23] Fama, Eugene F., (Risk, 1968): Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments, in: *Journal of Finance*, Vol. 23, 1968, S. 29-40.
- [24] Fama, Eugene F., (Capital, 1970), Efficient Capital Markets, in: *The Journal of Finance*, Vol. 25, 1970, S. 383-417.
- [25] Fama, Eugene F., (Foundations, 1976): *Foundations of Finance, Portfolio Decisions and Security Prices*, New York 1976.
- [26] Fama, Eugene F.; MacBeth, James D., (Risk, 1973): Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests, in: *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 1973, S. 607-636.
- [27] Franke, Jürgen.; Härdle, Wolfgang; Hafner, Christian, (Einführung, 2001): *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Berlin, 2001.
- [28] Frantzmam, Hans-Jörg, (Marktrisiko, 1990): Zur Messung des Marktrisiokos deutscher Aktien, in: *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Nr.1, 42. Jahrgang, 1990, S. 67-83.
- [29] Geyer, Alois, (Information, 1992): *Information, Erwartung, Risiko - Aspekte der Verteilung, Abhängigkeit und Varianz von finanzwirtschaftlichen Zeitreihen*, München, 1992.
- [30] Geyer, Alois; Hauer, Susanna, (ARCH Modelle, 1991): ARCH Modelle zur Messung des Marktrisikos, in: *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Vol. 43, 1991, S. 65-74.

- [31] Giot, Pierre, (Intraday, 2000): Intraday Value-at-Risk, CORE DP2045, Maastricht University METEOR RM/00/30, June 2000.
- [32] Glosten, L. R., Jagannathan, R. & Runkle, D. E., (Relation, 1993): On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, in: Journal of Finance, Vol. 48, 1993, 1779-1801.
- [33] Ghosh, A. K., (Market Model, 1992): Market Model Corrected for Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and the Small Firm Effect, in: Journal of Financial Research, Vol. 15, 1992, S.277-283.
- [34] Gouriéroux, Christian, (ARCH, 1997): ARCH Models and Financial Applications, Berlin, 1997.
- [35] Granger, Clive W. J.: Morgenstern, Oskar, (Predictability, 1970): Predictability of Stocks Market Prices, Heath Lexington Books, Lexington, Massachusetts, 1970.
- [36] Grinblatt, Mark; Titman, Sheridan, (Factor, 1983): Factor Pricing in a Finite Economy, in: Journal of Financial Economics, Vol. 12, 1983, S. 497-507.
- [37] Grossman, Sanford J.; Stiglitz, Joseph E., (Impossibility, 1980): On the Impossibility of Informationally Efficient Markets, in: American Economic Review, Vol. 70, 1980, S. 393-408.
- [38] Hamilton, James.D., (Time, 1994): Time Series Analysis, Princeton, 1994.
- [39] Hamilton, James.D.; Susmel, R., (Autoregressive, 1994): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Changes in Regime, in: Journal of Econometrics, Vol. 64, 1994, S. 307-333.
- [40] Hartung, Joachim, (Statistik, 1989): Statistik, München 1989.
- [41] Hicks, John R., (Value, 1939): Value and Capital, Oxford, 1939.
- [42] Hielscher, Udo, (Investmentanalyse, 1996): Investmentanalyse, München, 1996.

- [43] Jorion, Philippe, (Portfolio, 1992): Portfolio Optimization in Practice, in: Financial Analysts Journal, Vol. 1, 1992, S. 68-74.
- [44] Jorion, Philippe, (Value at Risk, 2001): Value at Risk, 2.Auflage, New York, 2001.
- [45] Laha, R.G.; Rohatgi, V.K., (Probability, 1979): Probability Theorie, New York, 1979.
- [46] Lintner, John, (Valuation, 1965): The Valuation of Risk, Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 47, 1965, S. 13-37.
- [47] Lintner, John, (Security, 1965): Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification, in: Journal of Finance, Vol. 20, 1965, S. 587-615.
- [48] Ljung, Greta M.; Box, George, E., P., (Measure, 1978): On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, in: Biometrika, Vol. 65, 1978, S. 297-303.
- [49] Mandelbrot, Benoit, (Variation, 1963): The Variation of Certain Speculative Prices, in: Journal of Business, Vol. 36, 1963, S. 394-419.
- [50] Manganelli, Simone; Engle, Robert F., (Value at Risk, 2001): Value at Risk Models in Finance, Working Paper Series, European Central Bank, Vol. 75, 2001.
- [51] Markowitz, Harry M., (Portfolio, 1952): Portfolio Selection, in: Journal of Finance, Vol. 7, 1952, S. 77-91.
- [52] Markowitz, Harry M., (Portfolio, 1959): Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments, New York, 1959.
- [53] Markowitz, Harry M., (Portfolio, 1991): Foundations of Portfolio Theory, New York, in: Finanzmarkt und Portfolio Management, Vol. 5, 1991, S. 204-211.
- [54] Meyer, Christoph, (Value at Risk, 1999): Value at Risk für Kreditinstitute: Erfassung des aggregierten Marktrisikopotentials, Wiesbaden, 1999.

- [55] Mhøj, Andreas, (Moment, 1985): The Moment Structure of ARCH Processes, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 12, 1985, S. 281-292.
- [56] Morgan, J.P., (RiskMetrics, 1996): RiskMetrics - Technical Document, 4. Auflage, New York, 1996.
- [57] Mossin, Jan, (Equilibrium, 1966): Equilibrium in a Capital Asset Market, in: Econometrica, Vol. 34, 1966, S. 768-783.
- [58] Nelson, Daniel B., (Heteroskedasticity, 1991): Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new approach, in: Econometrica Vol. 59, 1991, S. 347-370.
- [59] Rinne, Horst; Specht, Katja, (Zeitreihen, 2002): Zeitreihen - Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose, München, 2002.
- [60] Roll, Richard, (Critique, 1977): A critique of the asset pricing theory's tests, in: Journal of Financial Economics, Vol. 4, 1977, S. 129-176.
- [61] Scheicher, Martin, (Time-varying, 2000): Time-varying risk in the German stock market, in: European Journal of Finance, Vol. 6, 2000, S. 70-91.
- [62] Schierenbeck, Henner, (Bankmanagement, 2001): Ertragsorientiertes Bankmanagement: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung (Band 2), 7. Auflage, Wiesbaden, 2001.
- [63] Schlittgen, Rainer.; Streitberg, Bernd.H.J., (Zeitreihenanalyse, 2001): Zeitreihenanalyse, München, 2001.
- [64] Schmid, Friedrich; Trede, Mark., (Analyse, 2005): Statistische Analyse von Finanzmarktdaten, Berlin, 2005.
- [65] Schmitt, Christian, (Volatilität, 2002): Stochastische Volatilität, in: Schröder, M. (Hrsg.) Finanzmarkt-Ökonometrie: Basistechniken, Fortgeschrittenen Verfahren, Prognosemodelle, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2002.
- [66] Schwartz, Gideon, (Dimension, 1978): Estimating the dimension of a model, in: Annals of Statistics Vol. 6., 1978, S. 461-464.

- [67] Sharpe, William F., (Model, 1963): A Simplified Model for Portfolio Analysis, in: Management Science, Vol. 9, 1963, S. 277-293.
- [68] Sharpe, William F., (Capital, 1964): Capital Asset Prices. A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in: Journal of Finance, Vol. 19, 1964, S. 425-442.
- [69] Sharpe, William F., (Portfolio, 1970): Portfolio Theory and Capital Markets, New York 1970.
- [70] Sharpe, William F.; Alexander, Gordon J.; Bailey, Jeffrey V., (Investments, 1999): Investments, 6. Auflage, Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.
- [71] Steiner, Manfred; Bruns, Christoph, (Wertpapiermanagement, 2000): Wertpapiermanagement, 9. Auflage, Stuttgart 2007.
- [72] Steiner, Peter; Ulmer, Helmut, (Wertpapieranalyse, 2001): Wertpapieranalyse, 4 Auflage, Heidelberg 2001.
- [73] Stier, Winfried, (Forschungsmethoden, 1999): Empirische Forschungsmethoden, 2. Auflage, Berlin, 1999.
- [74] Tobin, James, (Liquidity, 1958): Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, in Review of Economic Studies, Vol. 25, 1958, S. 65-86.
- [75] Tobin, James, (Theory, 1965): The Theory of Portfolio Selection, in: Hahn, F. H.; Brechling, F. P. R. (Hrsg.), The Theory of Interest Rates, London, New York, 1965, S. 3-51.
- [76] Zagst, Rudi; Hermann, Frank; Schmid, Wolfgang, (GARCH-Modelle, 1996): Univariate und bivariate GARCH-Modelle zur Schätzung des Beta-Faktors, in: Finanzmarkt und Portfolio Management, Vol. 10, 1996, S. 45-52.
- [77] Zakoian, Jean-Michel, (Threshold, 1994): Threshold heteroskedastic models, in: Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 18, 1994, S. 931-955.
- [78] Zimmermann, Peter, (Schätzung, 1997): Schätzung und Prognose von Beta-werten, München, 1997.